

# 目 录

前言

符号

<b>第一章</b>	<b>桥梁上部结构型式</b> .....	1
1.1	引言.....	1
1.2	结构型式.....	4
	参考文献.....	17
<b>第二章</b>	<b>梁式上部结构：连续梁分析</b> .....	19
2.1	引言.....	19
2.2	结构类型.....	19
2.3	梁的弯曲.....	21
2.4	梁的扭转.....	36
2.5	用计算机分析连续梁.....	43
2.6	施工荷载.....	43
2.7	弯矩重分布.....	45
2.8	具有斜墩梁式上部结构.....	46
	参考文献.....	46
<b>第三章</b>	<b>板式上部结构：梁格分析</b> .....	47
3.1	引言.....	47
3.2	结构类型.....	47
3.3	结构作用.....	49
3.4	力分布的精确分析.....	56
3.5	梁格分析.....	56
3.6	梁格实例.....	64
3.7	输出数据整理.....	68

3.8	在集中荷载作用下的弯矩 .....	69
	参考文献 .....	70
<b>第四章</b>	<b>梁板式上部结构: 梁格分析 .....</b>	<b>72</b>
4.1	引言 .....	72
4.2	结构类型 .....	72
4.3	结构作用 .....	73
4.4	梁格分析 .....	76
4.5	梁格实例 .....	79
4.6	荷载作用 .....	84
4.7	输出数据整理 .....	85
4.8	梁板式上部结构中板的薄膜作用 .....	86
	参考文献 .....	88
<b>第五章</b>	<b>分格式上部结构: 剪力—柔性梁格分析 .....</b>	<b>89</b>
5.1	引言 .....	89
5.2	结构类型 .....	89
5.3	梁格网格 .....	90
5.4	结构作用状态 .....	91
5.5	梁格的截面特性 .....	105
5.6	荷载作用 .....	111
5.7	输出数据整理 .....	112
5.8	其他分析方法 .....	116
	参考文献 .....	117
<b>第六章</b>	<b>剪力铰桥面 .....</b>	<b>119</b>
6.1	引言 .....	119
6.2	结构性能 .....	119
6.3	梁格分析 .....	122
6.4	斜交式上部结构 .....	128
	参考文献 .....	128

<b>第七章</b>	<b>三维空间构架分析和板的薄膜作用</b>	129
7.1	板的薄膜作用	129
7.2	下伸式梁格	130
7.3	麦克亨利 (McHenry) 空间桁架	137
7.4	十字型空间构架	140
7.5	关于梁板式上部结构性能——板的薄膜作用	142
	参考文献	144
<b>第八章</b>	<b>剪力滞后和边梁加劲作用</b>	145
8.1	剪力滞后	145
8.2	翼缘有效宽度	146
8.3	板式上部结构边梁的加劲作用	149
8.4	梁板式上部结构的上伸式护墙	151
8.5	梁板式上部结构的管线通道	153
	参考文献	155
<b>第九章</b>	<b>斜交式、变宽度式和曲线式上部结构</b>	156
9.1	斜交式上部结构	156
9.2	变宽式上部结构	161
9.3	曲线式上部结构	162
	参考文献	165
<b>第十章</b>	<b>初步设计图表</b>	167
10.1	引言	167
10.2	荷载分布图表	168
10.3	板式、梁板式和分格式上部结构的影响线	170
10.4	应用图表分析板式上部结构	178
10.5	应用图表分析梁板式上部结构	183
10.6	应用图表分析分格式上部结构	187
	参考文献	192
<b>第十一章</b>	<b>温度与预应力荷载</b>	194

11.1	引言	194
11.2	简支跨径内温度应变与应力	194
11.3	连续式上部结构内的温度应力	199
11.4	温度弯矩的梁格分析	202
11.5	徐变和收缩	203
11.6	预应力轴向压缩	203
11.7	由于索偏心的预应力弯矩	205
11.8	由于索的曲率引起的预应力弯矩	207
11.9	用柔度系数作预应力分析	209
	参考文献	211
<b>第十二章</b>	<b>谐波分析和褶皱理论</b>	<b>213</b>
12.1	引言	213
12.2	荷载、弯矩的谐波分量	214
12.3	低谐波和高谐波的特性	219
12.4	平面上部结构的谐波分析	223
12.5	褶皱分析	225
12.6	连续式和斜交式上部结构	231
12.7	接近陡变的谐波误差	232
	参考文献	233
<b>第十三章</b>	<b>有限元法</b>	<b>235</b>
13.1	引言	235
13.2	二维平面应力单元	236
13.3	板弯曲单元	244
13.4	三维板结构和壳单元	248
13.5	有限条	250
13.6	三维单元	252
13.7	结语	253
	参考文献	253

<b>附录 A</b>	乘积积分, 单跨上的荷载函数, 谐波分量·····	255
<b>附录 B</b>	梁板式和分格式上部结构的近似槽板法·····	258

# 第一章 桥梁上部结构型式

## 1.1 引言

自从工业革命开始以来，今天桥梁上部结构发展得比任何时候都要快。现在的桥梁即使很少有像罗勃·史蒂文生 (Robert Stephenson) 所设计的勃列坦尼亚桥 (Britannia) 那样突出，然而由于桥位的复杂性正进一步向工程师们的才智挑战，要求提出新型的结构和合适的建筑材料。解析方法同时产生了，并且在最近三十年内发展的非常快。荷载分布的手算法以及最近对数字计算机的应用，使得工程师们能够分析具有组合的横截面和复杂的斜交式、曲线式和连续式桥跨上部结构。这些设计方法需要相当大量的理论和试验研究以改善和检验它们的可靠性。然而，现在人们已创造出这样的可用形式。了解了物理性能，设计者可以无须求助于复杂的数学理论，就能分析复杂的上部结构。

本章对目前使用的桥梁上部结构的主要形式加以回顾和分类，关于其分析方法在以后各章节中加以介绍。按照几何性质的不同，上部结构可分为梁、格梁、板、梁板式和分格式。许多上部结构不能归纳入一个类型，然而，可用几种不同类型的综合方法来分析。

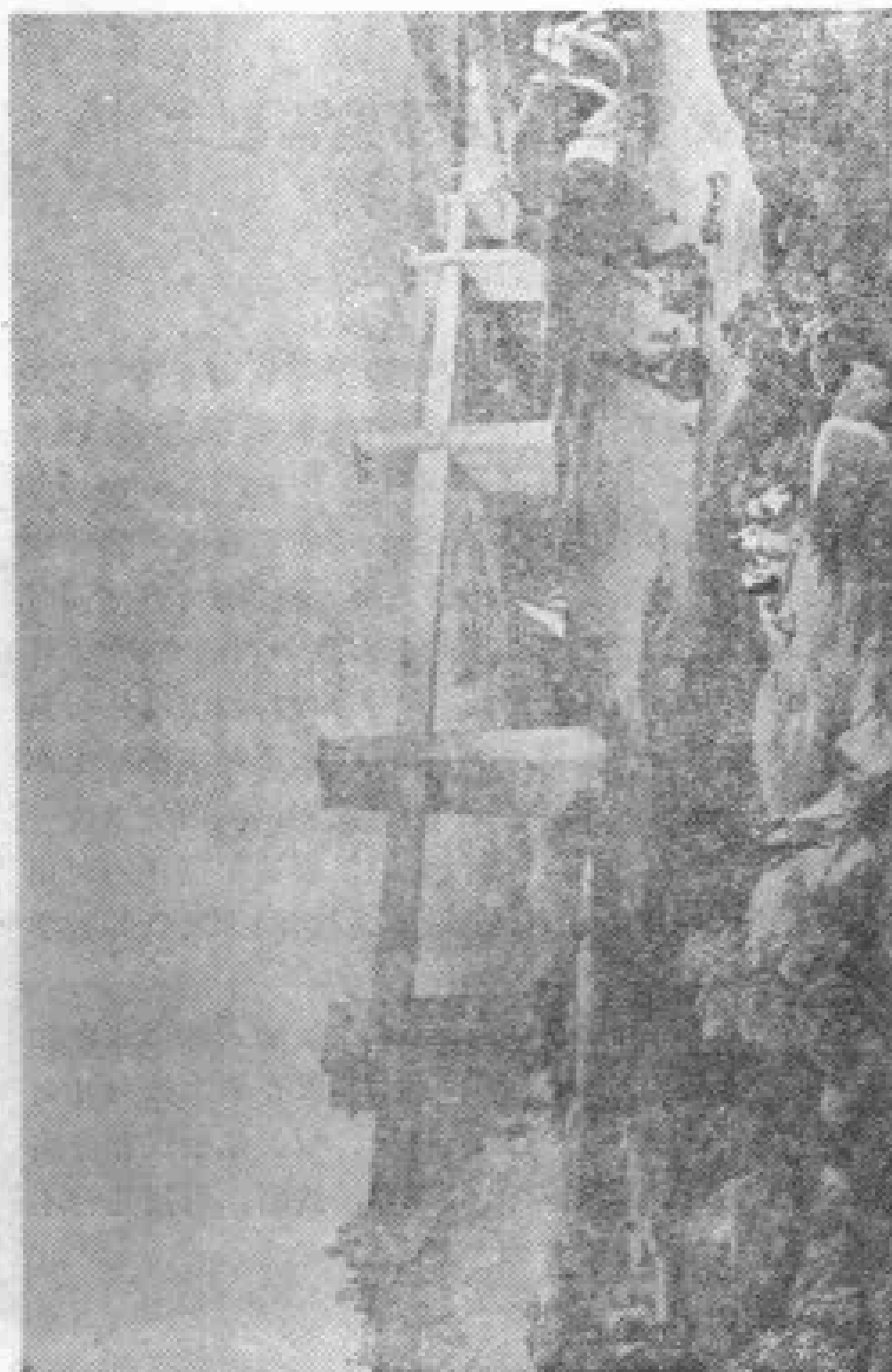


图1.1 威尔士·特列坦尼夏 (Britannia·Wales) 桥 (1849)  
主跨为 140m, (460英尺) 铸铁箱型梁上胆结构, 由罗伯特·史蒂文生 (Robert Stephenson) 设计, 取自  
奇·霍金斯 (G·Hawkins) 石印品, 1850年 (土木工程师学会供稿, 伦敦)。

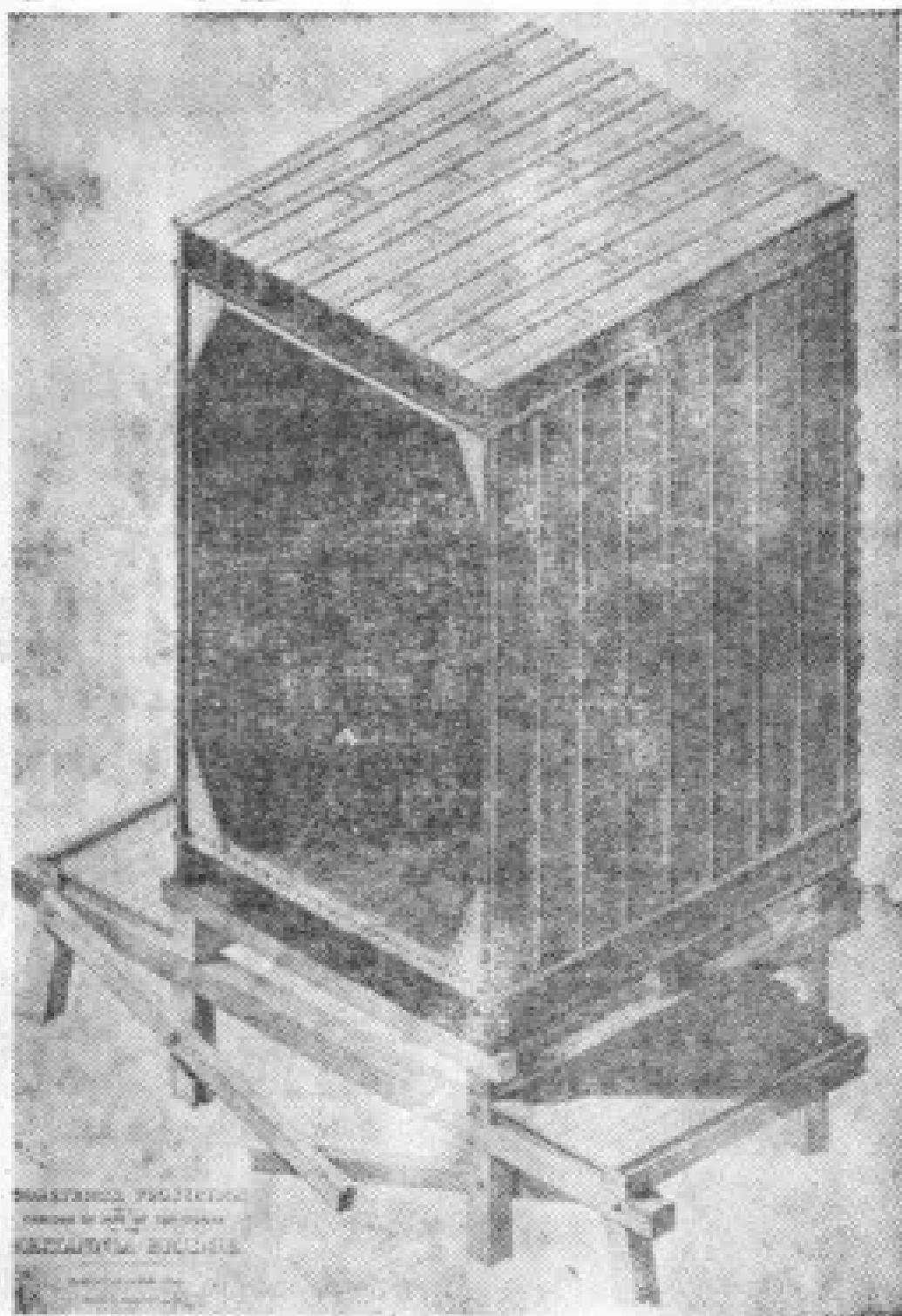


图1.2 勃列坦尼亚 (Britannia) 桥的细节  
(科学博物馆供稿, 伦敦)。



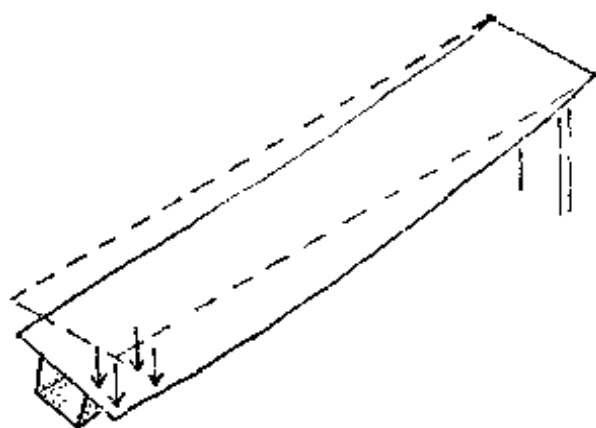


图1.3 常截面梁式上部结构的弯曲与扭转

## 1.2 结 构 形 式

### 1.2.1 梁式上部结构

如果桥梁上部结构的长度超过宽度,到这样的程度,以致荷载使桥梁上部构造沿其长度产生弯曲和扭转,而横截面整个变位而不改变形状,这样的上部结构可以作一根梁来考虑。

最普通的梁式上部结构是人行桥,不论是钢的,钢筋混凝土的还是预应力混凝土的,也常常都是做成两跨以上的连续梁型式。另外,某些最大型的箱型板梁上部结构可以作为梁来分析,以确定纵向弯矩、剪力和扭矩的分布。在勃列坦尼亚 (Britannia) 桥以及现代的长跨度箱梁桥中,控制荷载是集中力,因此在偏心荷载所引起的横截面的扭转变形对主弯曲应力的影响是相对地来说很小的。

在连续梁式上部结构中,弯矩和扭矩的分析将在第二章讨论。

### 1.2.2 格梁式上部结构

格梁式上部结构,其主要构件是用两根以上的纵向梁与横向梁(或隔板)一起共同支承行车道板构成的,在主纵向梁间荷载由横向梁的弯曲与扭转来分布。由于这种结构横隔

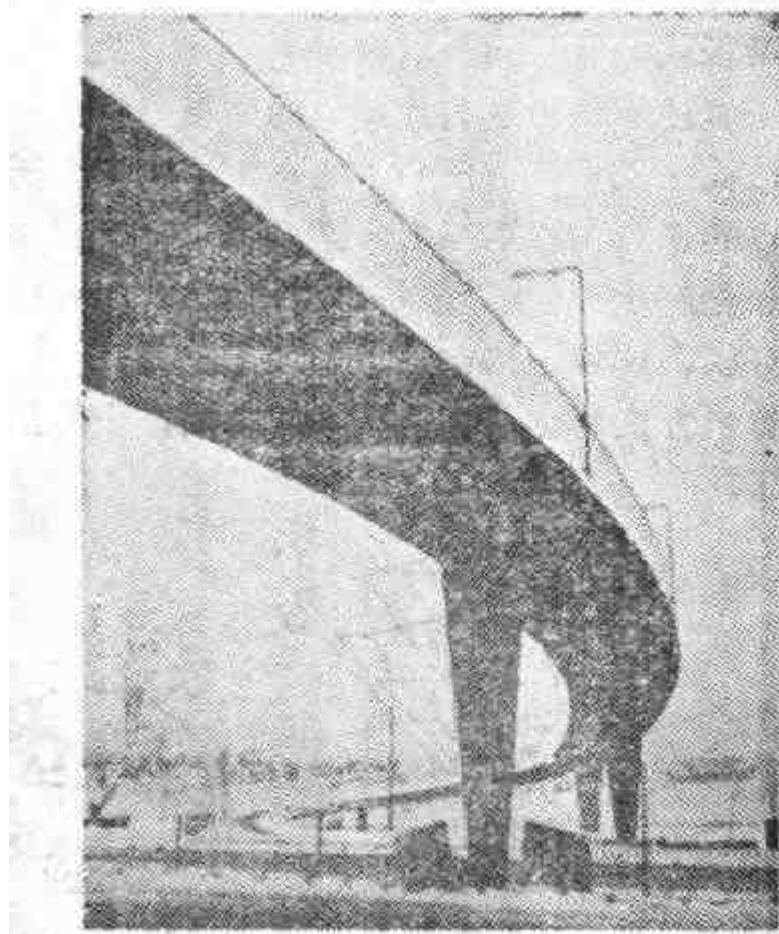


图1.4 挪威 (Norway) 某人行桥  
梁式上部结构，由工学博士埃·哈斯—杰柯逊 (A·Aas—Jakobsen)，  
工程师和琼纳斯汉许斯 (Jonas Haanshus) 建筑师设计 (伦敦水泥与  
混凝土协会供稿)

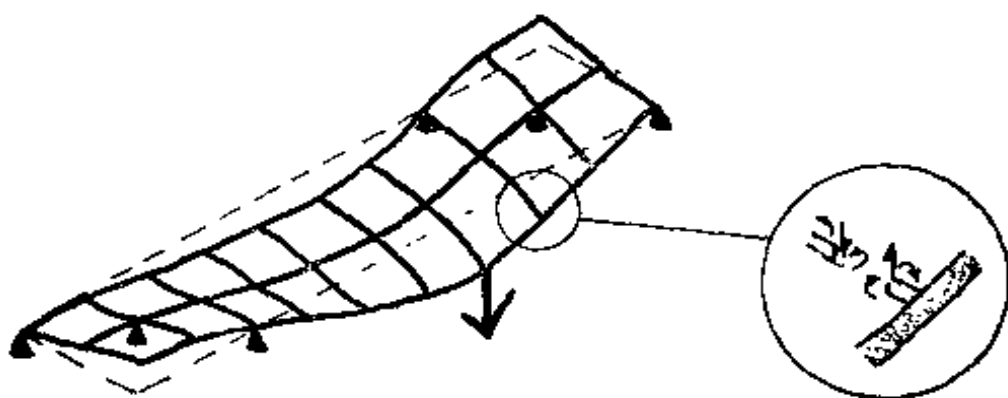


图1.5 格梁式上部结构内由于梁构件的弯曲和扭转的荷载分布

梁需要预制装配或现场浇注，所以已不太流行，而为板式和无横隔板的梁板式上部结构所取代。

第三章中叙述了使用普通计算机的网格分析法，对于分析格梁上部结构来说是很方便的。实际上，这个分析法是将梁的每一节点的弯矩和扭矩列出一系列联立角变位移方式，然后按荷载条件解此方程组。多年以来，格梁式上部结构一直使用手算法分析，这种方法在第十章中简略作了介绍。然而，随着计算机方法简化，更为多方面适用，手算法已逐渐变得不流行了。

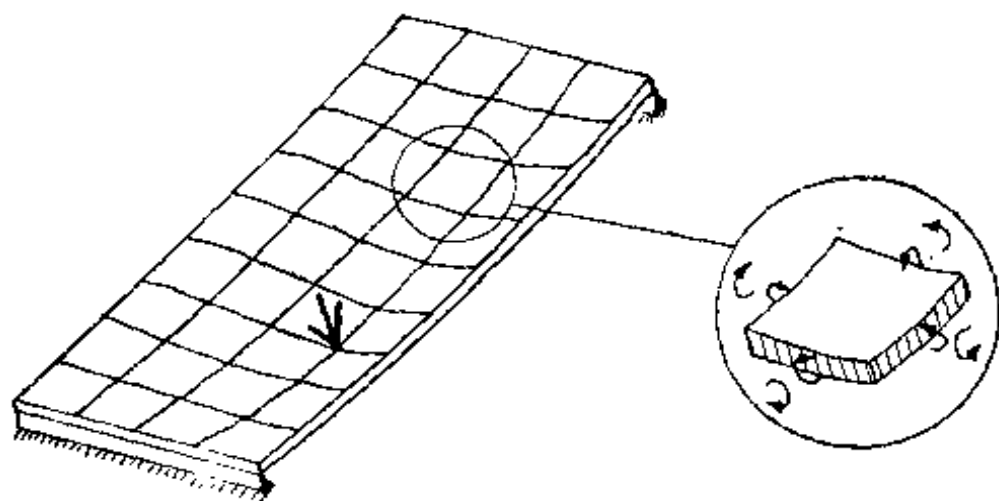


图1.6 板式上部结构在两个方向由于弯曲和扭转的荷载分布

### 1.2.3 板式上部结构

板式上部结构如同平板一样，它在结构上对于板平面内各个方向传递弯矩和扭矩是连续的。当荷载位于板的一部分上时，板局部地挠曲成“碟”形，并产生两维弯矩和扭矩把荷载传递和分布到邻近桥面受载不大的部分。当板的刚度在其平面内各方向均相同时，这种板就是“各向同性的”；当板的刚度在垂直相交的两个方向不同时，则为“正交异性”板。

混凝土板式上部结构通常用于跨度小于15米（50英尺）的地方。若上部结构为就地浇筑，即使钢筋在各个方向上不

一定相同，通常仍把它看作是各向同性板。

施工期间，在脚手架上不便于支承桥面板时，可先架好预制梁，然后在其梁间就地浇筑钢筋混凝土组合而成。如果预制混凝土梁或钢梁的纵向刚度大于就地浇筑混凝土部分的横向刚度，这样的上部结构即为正交异性的。

跨度大于15.0米（50英尺）时，实体板的材料用量和恒载变得过大，而习惯上在接近中性轴处挖空成圆柱形或矩形空洞以减轻重量。若空心的深度和宽度小于整个结构高度的60%，则它们在刚度上的影响是微小的，可视同实体板一样有效地工作。空心板式上部结构通常采用永久性的模型把混凝土浇筑成为空心形状，或采用预应力混凝土箱型梁，在横向以后张法保证横向连续性的施工方法。若空心尺寸超过高度的60%时，这样，上部结构可考虑为具有不同性能的分格式构造，留待以后叙述。

目前，大多数板式上部结构的精确分析是不可能的。然而，如第三章所述，板式上部结构可以方便地用计算机作梁格分析。在这方法中，连续板可由纵向与横向刚度近似地与该纵横梁所代表的局部范围板的刚度相同的等效梁格代表，不过这种模拟不是完全符合实际情况，但发现它与精确解是非常一致的，对大多数设计是足够精确，因而可以采用。在第13章内介绍了一个较精确的有限元法，此法可用计算机的程序进行计算。在这方法中，上部结构假设分割为许多单元，通常是三角形，对每一个单元可以导出近乎板的弯曲方程并解决之（与用梁格内的梁的方程式相对应）。这个方法比之梁格法虽然较为完善，但是费用昂贵，对于板式上部结构来说，通常没有产生明显不同的结果，因而梁格法常常优先选用。对于具有简单平面几何性质的板式上部结构设计，第十章介绍的手算法提供一个较方便的分析方法。然而，如前所

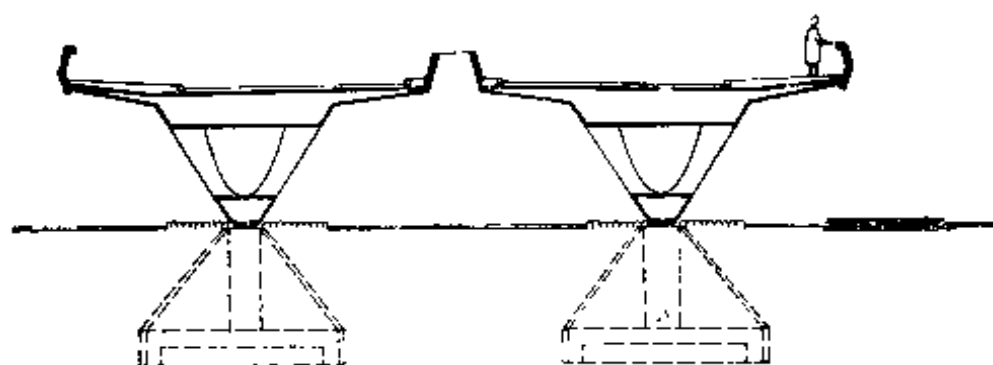
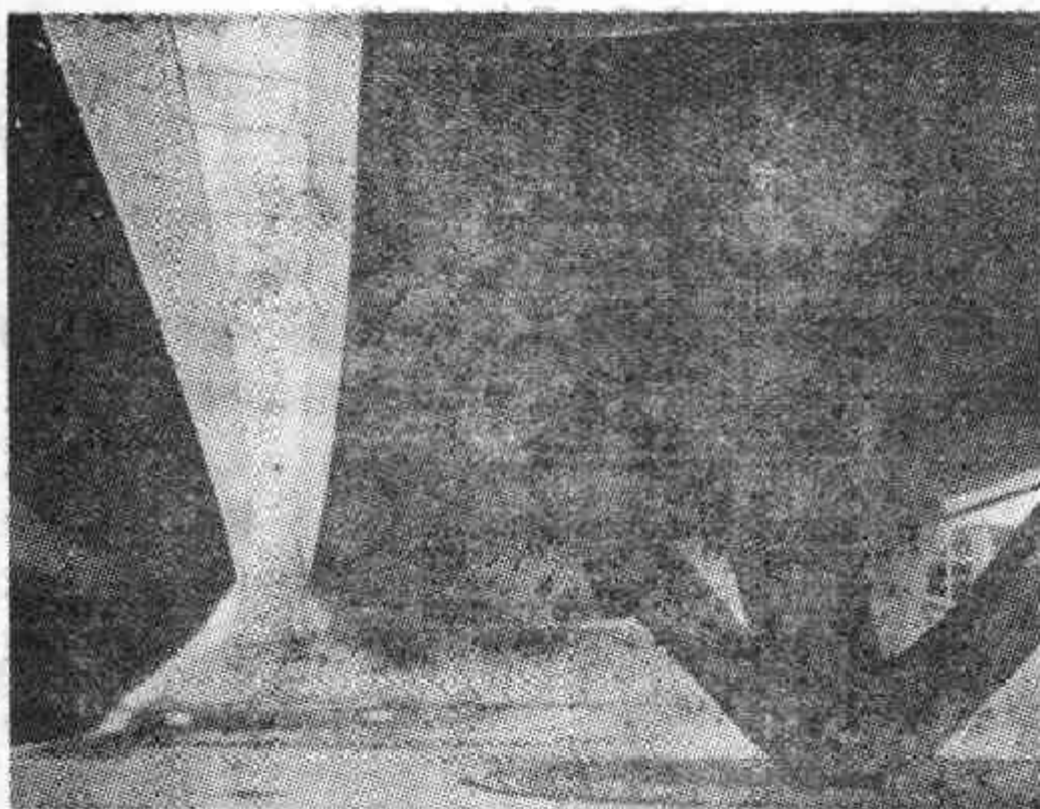


图1.7 犀菲尔特 (Sheffield)，西堤 (Western Bank) 桥 (1969)  
板式上部结构，由伦敦奥弗阿罗泊事务所 (Ovev Arup Datncrs) 设计  
和供稿。

述，对于格梁式上部结构，计算机方法较易使用，故提供较多的数据。

剪力铰式上部结构是一种不符合主要类型的上部结构。它是由毗邻的预应力混凝土（或普通钢筋混凝土）矩形或箱形截面的梁建造而成，沿其长度方向灌注混凝土连接缝。由

于在横向不施加预应力，因而横向弯矩呈为不完全连续。这种类型的上部结构，主要应用于在交通繁忙的公路和铁路上修建的桥梁，便于在晚上安装，然后在不妨碍交通之下灌注节缝。虽然这种上部结构几乎没有横抗弯刚度，但是各梁之间的荷载的分布仍然是发生的，这是因为各梁的不同挠度由梁抗扭刚度来抵抗，而垂直剪力则通过节缝来传递。这种上部结构的分析将在第六章中叙述。

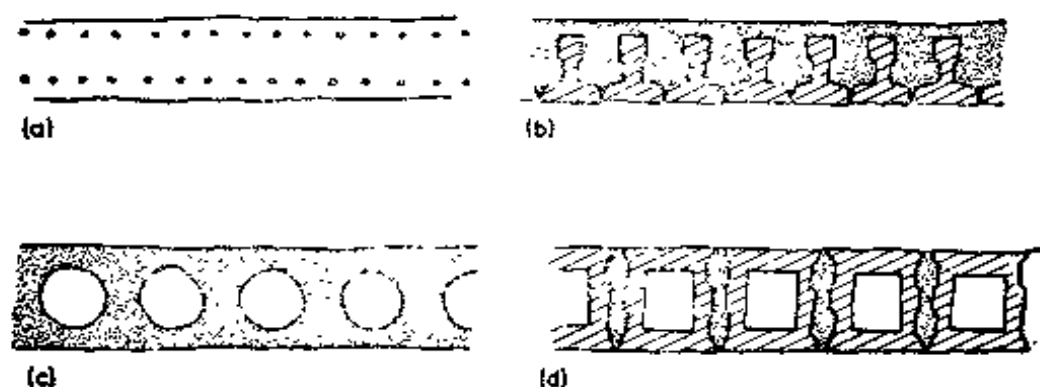


图1.8 板式上部结构

(a)实体的；(b)填充于预制梁上的就地浇筑的混凝土组合物；(c)空心的；(d)横向后张空心式预制箱型梁

#### 1.2.4 梁板式上部结构

梁板式上部结构，是用一薄的连续板横贯多根纵梁顶部连接而成。荷载纵向传递到支点时，板作为梁的翼缘板与梁一起工作，同时，受荷载最大的一些梁产生较大挠度使得板在横向上弯曲，因此它传递并把荷载分布到相邻的梁上。有时沿跨度各点上设置横隔板帮助荷载的横向分布，因此，上部结构的性能很相似于格梁式上部结构。但是由于横隔板施工困难及其局部刚度可能导致不必要的应力集中，故横隔板的使用逐渐变得不流行了。梁板式结构的优点比板式结构轻的多，而且具有必要的纵向刚度以及便于预制装配，因此，对于较大跨径的桥梁来说，它是适合的。有时，横向柔度也可

能有优越性，例如、斜桥受荷载时，由于易弯和易扭，不致使短对角线支座受压太大，而长对角线桥面板挠起。

梁板式上部结构可分为两种主要类型：那些中心紧靠或邻接的梁称为“密排梁板式”，那些中心离远的梁称为“稀排梁板式”。最普



图1.9 剪力铰接桥面中由梁的扭矩来抵抗梁的不同挠度

通的密排梁板式上部结构，是由预制的预应力混凝土倒T型

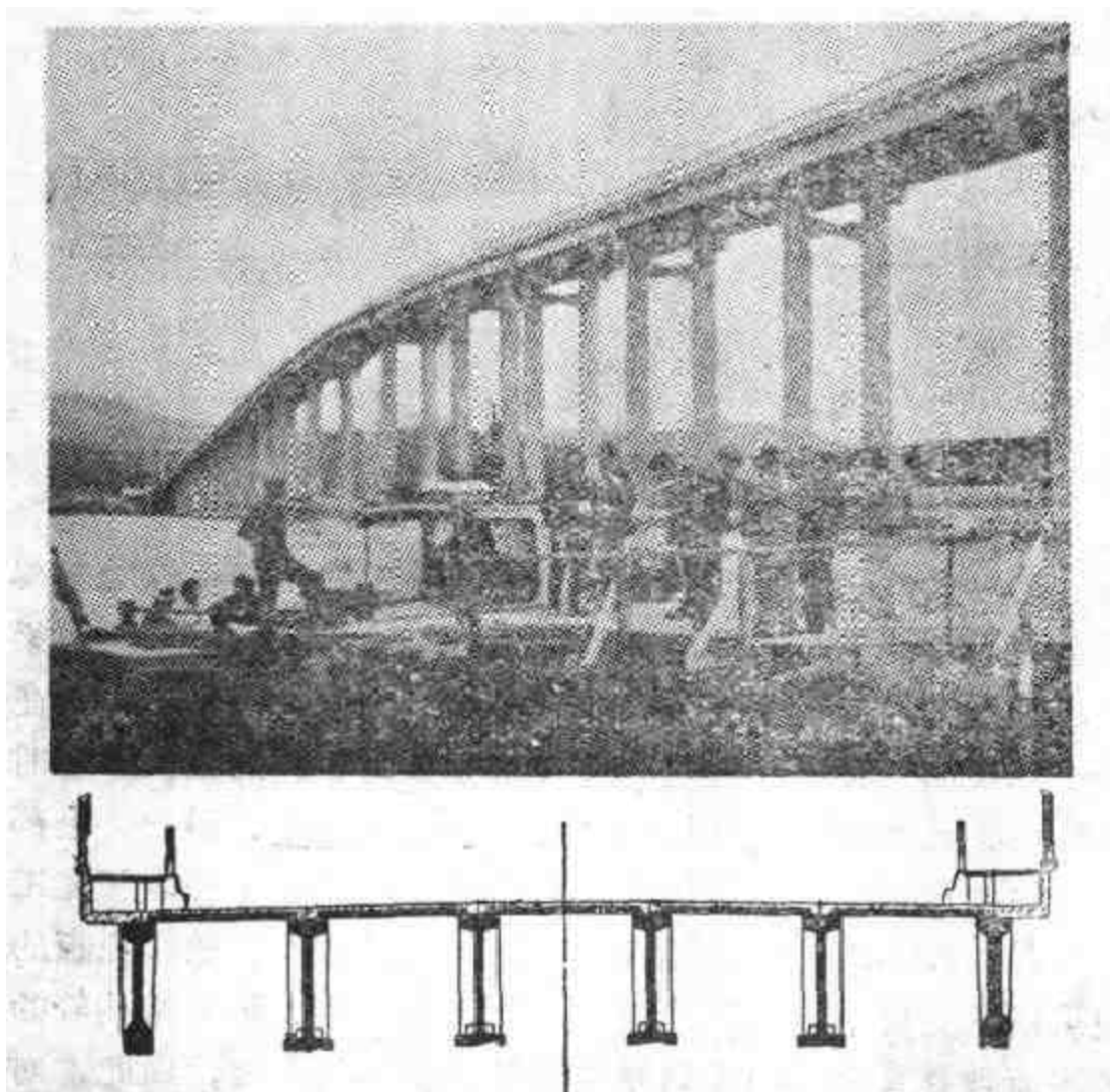


图1.10 澳大利亚 (Australia)，塔斯曼 (Tasman) 桥 (1964) 梁板式上部结构，由基福特 (E.W.H.Gifford) 事务所设计和供稿。

梁支承着一现浇的大约200毫米(8英寸)厚度的钢筋混凝土板组成的。当荷载作用在这种上部结构的一部分上时,板以一光滑波形下挠,因此,对于荷载分布来说,其性能可以考虑为与一具有纵向加劲的正交异性板相似。

稀排梁板式上部结构,梁中心间距通常约为2米(6英尺)到3.5米(12英尺)。上部结构是由预制预应力混凝土梁或钢梁支承着一块混凝土板构成的。对于混凝土板来说,从全部采用就地灌注开始,到以最少量的就地灌注混凝土填充接头把每片大型梁段连接成整体,在施工方法上发生了很大变化。有时,在钢梁上的车道板由纵横加劲式钢桥面板(battledeck)组成,该种桥面板系用一块厚度为12毫米( $\frac{1}{2}$ 英寸)经过加劲的薄钢板建造的。当一荷载置于稀排梁板式上部结构的一根梁上时,桥面板在梁间横向不是都以单波形式下挠,而有时以波浪式挠曲。假使梁具有强大抗扭刚度(如箱梁)时,则只能作微小的扭转使板挠曲成横向的阶梯形,而其性能则不同于正交异性板,而对于分析模型来说,适于那些正确的横布于上部结构上较大的纵梁刚度,如果各个刚度不可能正确地确定位置,计算荷载分布时,有时可将横截面用平面刚架分析求出它的横向弯曲和扭转。

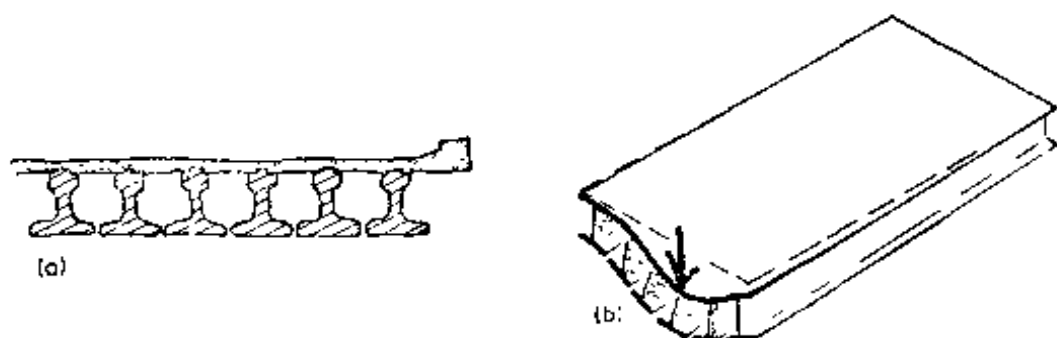


图1.11 (a)密排梁板式上部结构;(b)密排梁板式上部结构挠曲成为光滑曲面



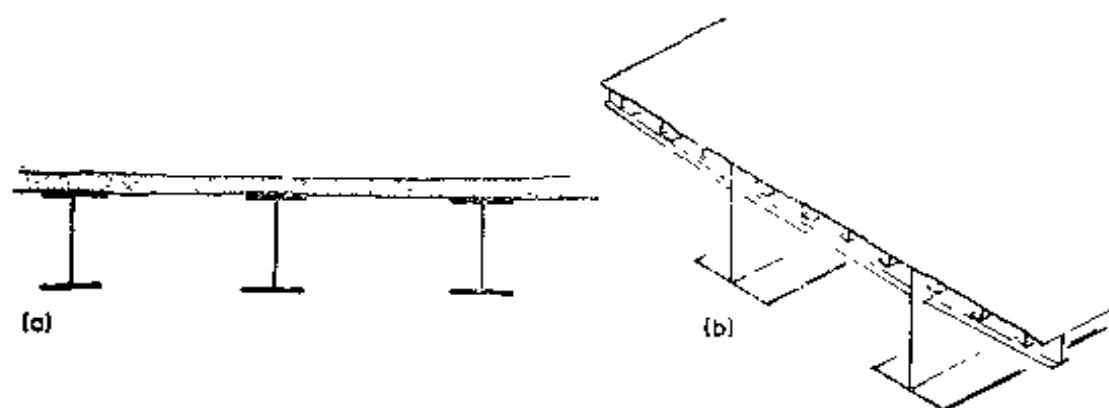


图1.12 具有工字钢梁的稀排梁板式上部结构  
(a)混凝土板；(b)纵横加劲式钢桥面板 (battled deck)

稀排梁板式上部结构可以少到两根主梁，其间距大于12米（40英尺）。实体混凝土主梁间距大于7米（24英尺）者是罕见的，但混凝土双主梁与钢箱型梁上部结构则是常见的。主梁的弯曲与扭转性能，

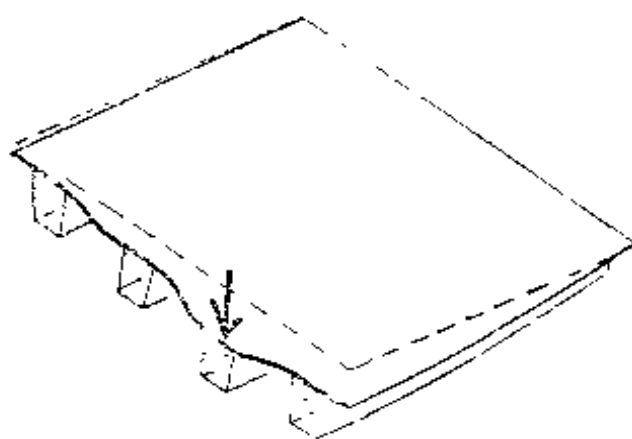


图1.13 稀排梁板式上部结构以阶梯形或波浪形挠曲

尽管应考虑为以后所介绍分格式上部结构，但是，主梁间的荷载分布本质上是梁板式的。

梁板式上部结构分析，可用前面所述的板式上部结构的计算机梁格通用程序较为方便。这种方法的应用将在第四章中叙述。一般对于设计来说，该法有足够精确度，因而为人们所接受，但是，由于相邻梁承受不同的弯曲挠度，致使梁顶纤维形成缩短，产生差值，因而略去了在板内可能产生很大水平剪力。这些力的估算方法将在第七章中叙述。

#### 1.2.5 分格式上部结构

分格式或箱型上部结构。其横截面是由薄板与薄的或厚的腹板围成多个格室构成的。这些复杂的结构形式在跨径超过30米（100英尺）时比梁板式上部结构性能好，而优先选用，因为这种结构除了满足耗料少、重量轻和纵向弯曲刚度大的要求外，它们还有大的抗扭刚度，这种刚度使其具有较好的稳定性和荷载分布特性。然而，某些设计者认为这种结构是一种比较流行的形式。在近年来，对于跨径大而又高的桥梁来说，使用箱型上部结构显得特别壮观；在跨径大桥又高而不宜架设脚手架的情况下，就把上部结构分成梁段采用悬臂拼装法施工。这种悬臂施工法在梁板式上部结构中则很少采用，因为它通常需要大的桁梁临时支撑来建成的上部构造，以保证其抗扭刚度。在叙述分格式上部结构的性能时，为了方便起见，将其分成多格式板和箱型梁两种。

多格式板是具有几个宽而浅的大格室的上部结构，其横断面形状不适宜分段预制拼装，因而通常采用就地浇筑混凝土，或者预制密排的箱型梁或具有较大空心的顶帽梁。跨度在36米（120英尺）以内时，采用现场浇筑法，此时上部结构的格室则由直径超过结构高度60%的圆柱形大空心组成。对于较大的跨度，这样的上部结构由于太重，则把格室横断面做成矩形，扩大空洞面积以减轻其重量，因此，其顶板和底板普遍分别使用200毫米（8英寸）和150毫米（6英寸）薄板。当荷载置于这样的上部结构上某一部分时，由于它具有很大的抗扭刚度和横向弯曲刚度，因此把荷载传递并分布到全宽的面积上，但是分布不是如同一块板那样有效，因为当传递腹板间的垂直剪力时，薄的顶板和底板单独地挠曲，而横截面则如同空腹桁架那样作扭转变形。这种扭转变形可沿上部结构不同位置上设置横隔板从而减少这种变形，但是，如同梁板式上部结构，除了在支点处必须设置以传递无

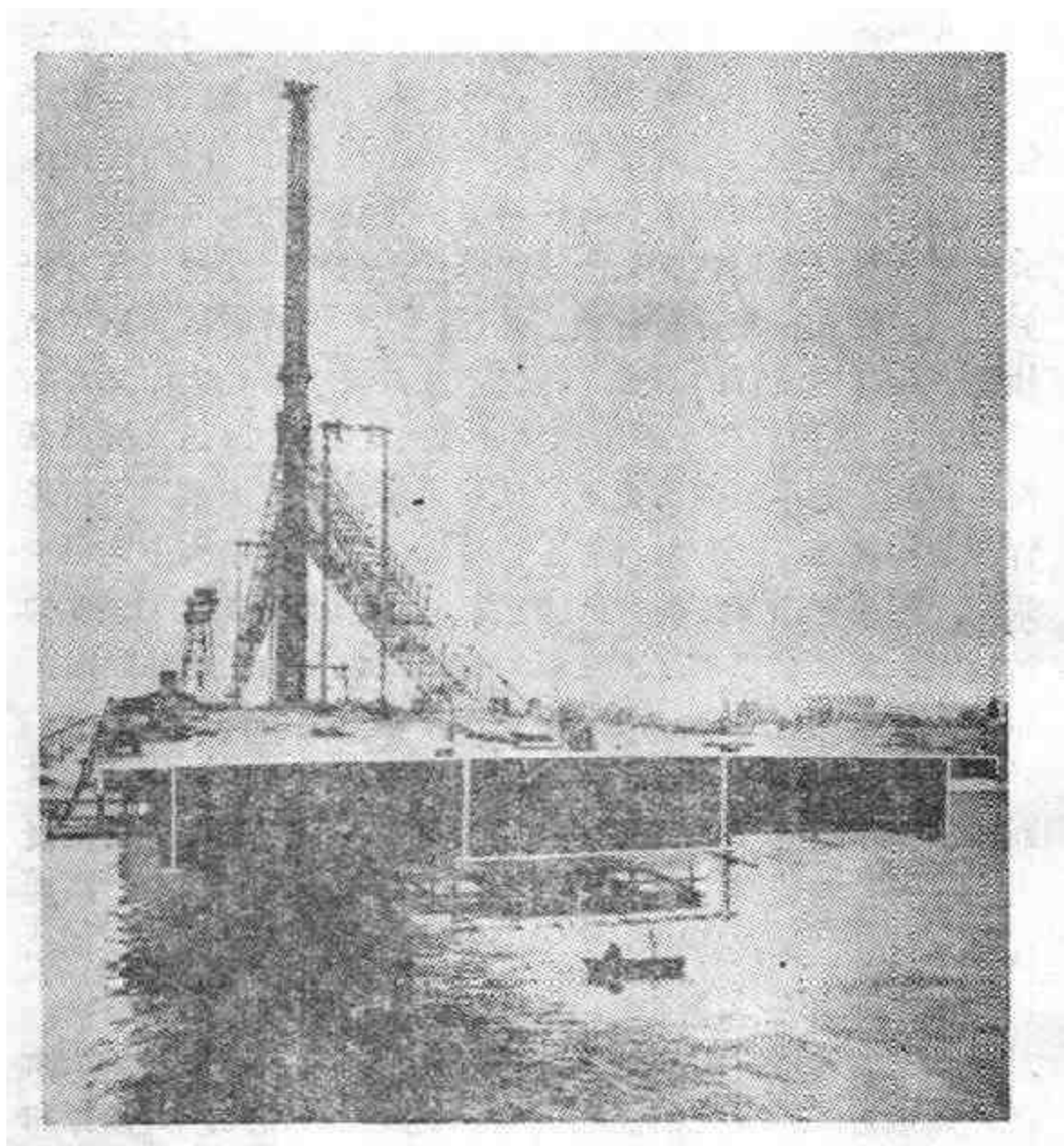


图1.14 汉堡 (Hamburg) 易北 (Norderelbe) 桥 (1962)  
工字钢与箱型板梁斜张上部结构, 由莱茵钢铁公司 (Rheinstahl AG), 多特蒙德 (Dortmund) 设计与建造 (莱茵钢铁公司克隆 (Rheinstahl-Klönne) 供稿)。

支承腹板的垂直剪力到支座外, 其用途已不流行了。

箱型梁桥上部结构由一个或几个大格室构成的横截面, 边格室往往由倾斜的外腹板构成三角形横截面。顶板边缘横向悬出往往比箱宽些。当偏心荷载作用在悬臂上时, 上部结构的过大扭转由其本身所具有的强大的抗扭刚度来抵抗。中

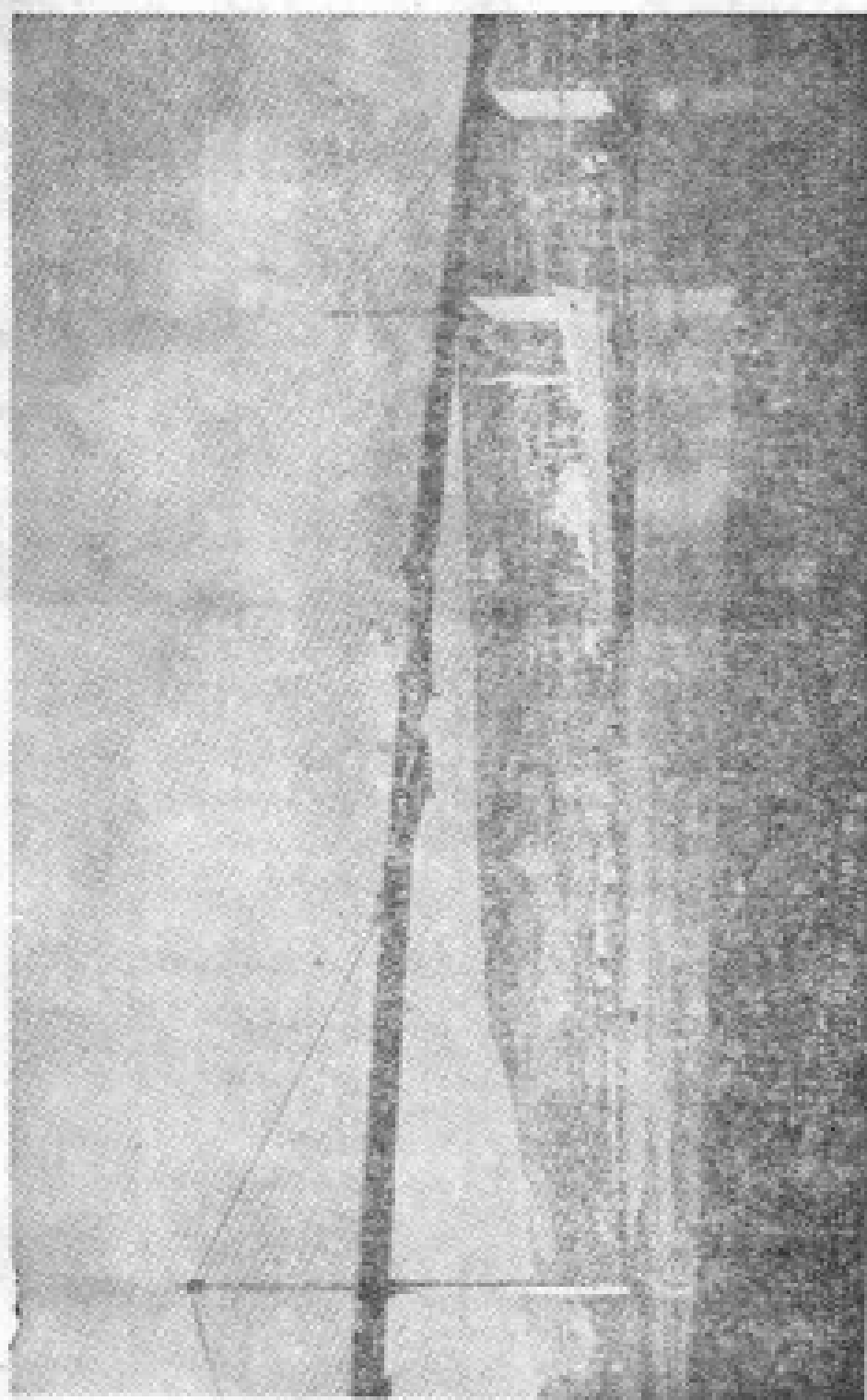


图1.15 格拉斯哥 (Glasgow) 埃尔斯金 (Erskine) 桥 (1971)  
钢桁型斜张上部结构，由伦敦弗里曼福克斯 (Freeman Fox) 设计事务所设计与供隔。

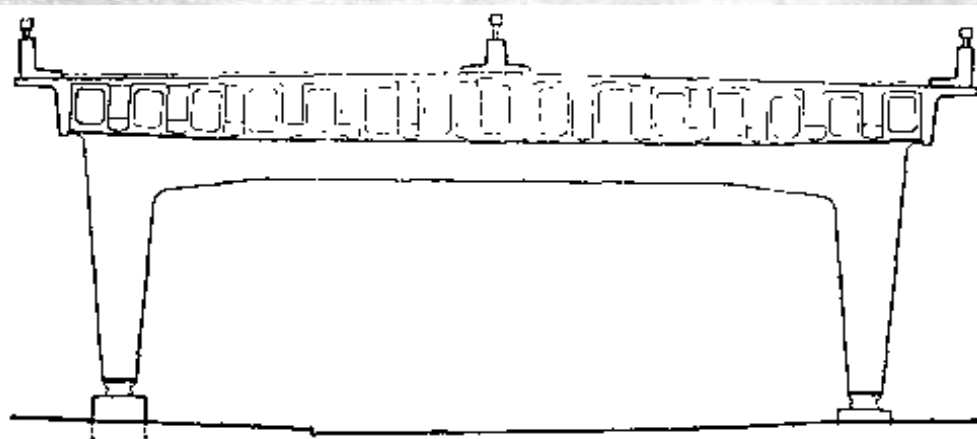
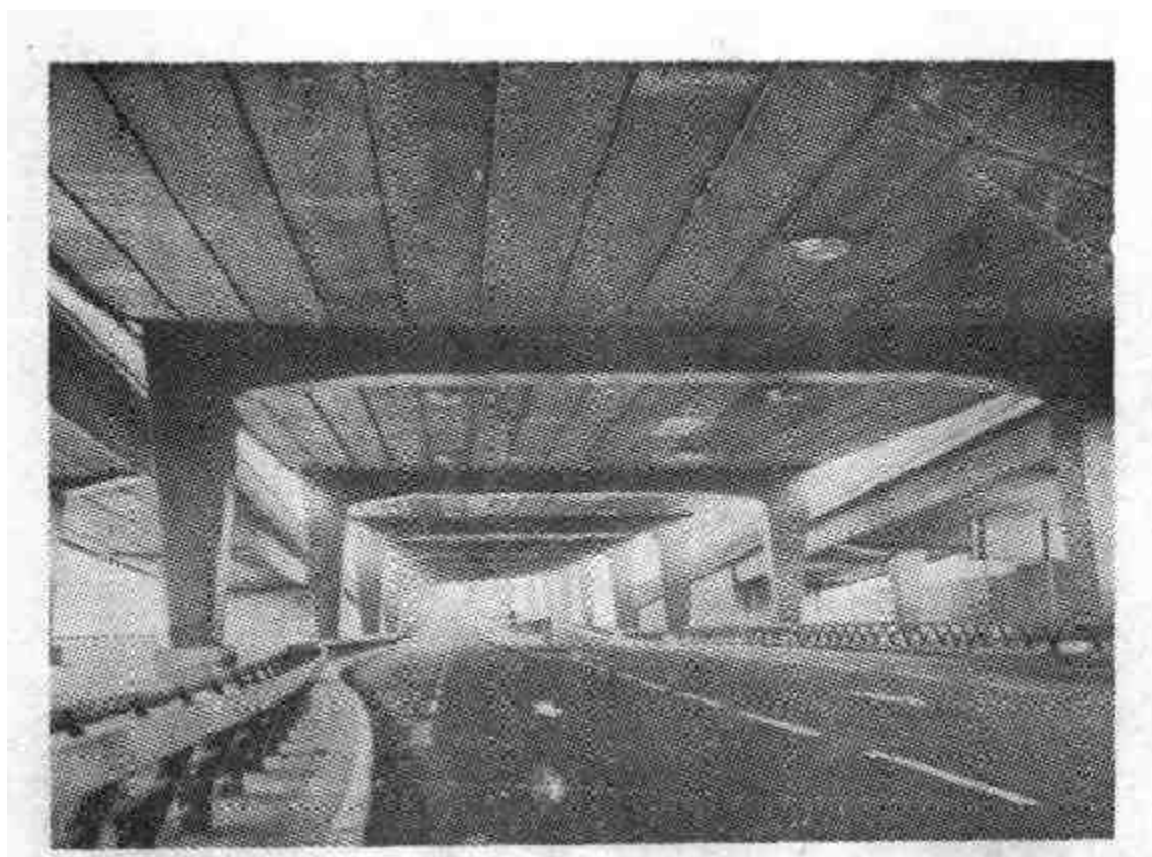


图1.16 伦敦西道 (Westway) 6号桥 (1970)  
密排顶帽梁构成的多格式上部结构, 由伦敦曼西尔 (G·Maunsell) 设计  
事务所设计, 并供给照片; 伦敦水泥与混凝土协会供图。

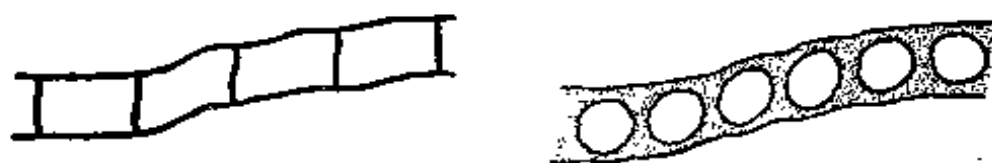


图1.17 多格式上部结构格室的扭转变形

心跨径的混凝土箱型梁，通常采用就地灌注的或分段预制，在脚手架上或活动框架上拼装并预加应力。大的跨度一般用分段预制悬臂拼装或者用悬臂法分段就地浇筑，就地浇筑前，移动式模板支在已建成的结构上。钢箱型梁也可按悬臂法建造，但有时装配成一长段，重达几千吨，用爬升式千斤顶顶起就位并连接成一体。车道板采用纵横加劲式钢桥面板 (battleddeck) 或混凝土组合构造，通常在受扭箱就位后再安装。

分格式上部结构合适的分析方法视结构形式的复杂程度而定。若上部结构没有或仅有少数的横隔板，则在第五章中所介绍的用计算机的剪力柔性梁格是最适宜的。在这方法中，上部结构用梁格来模拟（如前所述），但是分格式上部结构的梁的抗扭刚度很大，角变位移方程则考虑为梁的剪切变形。由于横梁的抗剪刚度很小，则其剪切变形可模拟为格室的剪切变形就一般而论，对于设计来说已够精确，但这种分析却未能提供板单元内弯曲与薄膜应力的细节图形，进而需要采用三维分析。第七章所述空间结构分析方法被认为是可靠的，因为上部结构系由一个物理性能明确的结构来表示，所以为设计工程师所采用。若上部结构从这一端到另一端有均匀的横截面，而且只有少量横隔板，则褶皱板分析法（见第十二章所述）可能是最精确的方法。另一方面，若上部结构为变截面，而且具有许多横隔板，则需用有限元法分析（见第十三章所述）。这个方法费工费事，但往往用它研究结构某一小部分的应力流，而用较简单的方法分析整个上部结构的荷载分布，是十分方便的。

### 参考文献

1. Beckett, D. (1969), Great Buildings of the world, Bridges, Hamlyn, London.

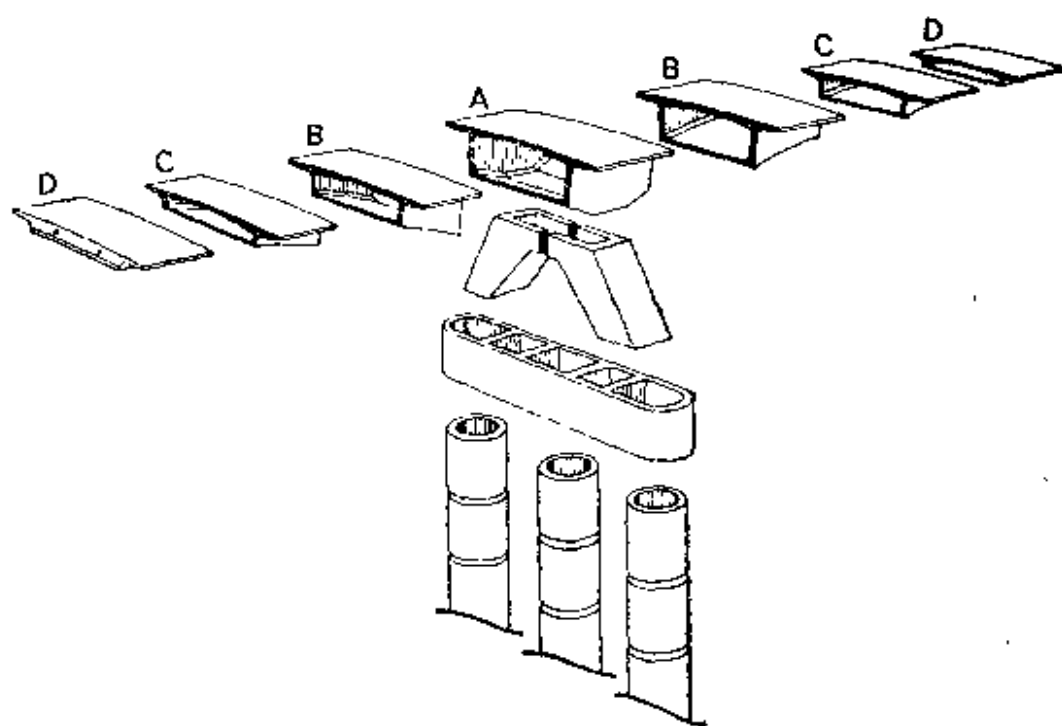
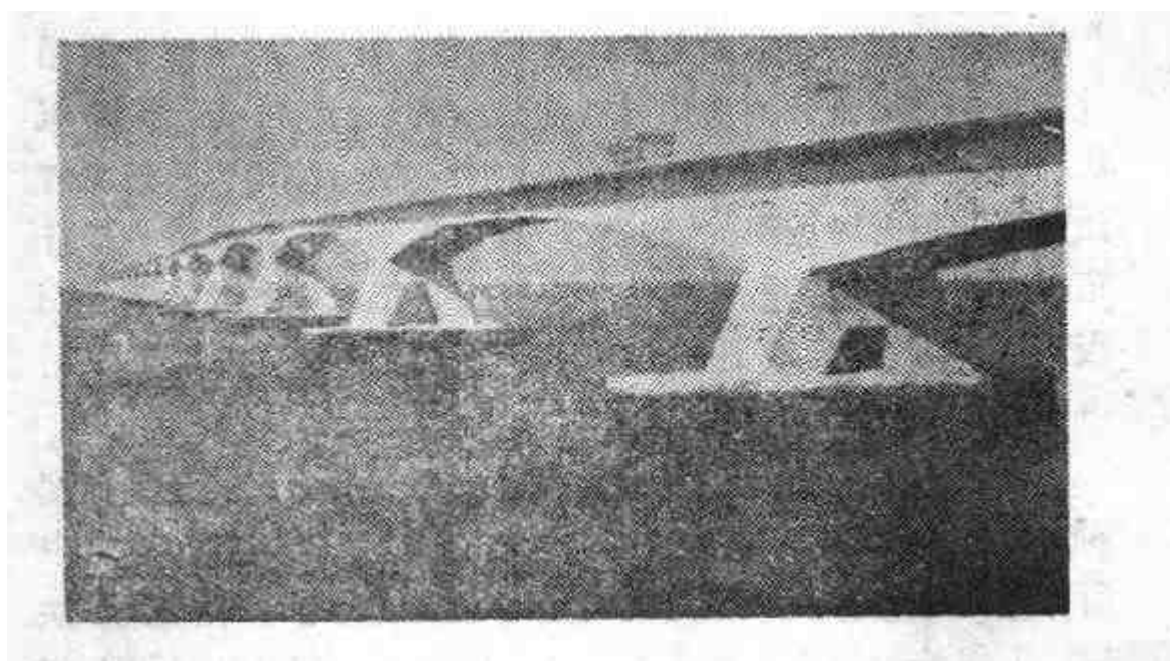


图1.18 荷兰 (Holland) 奥斯特谢尔德 (Oosterschelde) 桥 (1965)  
由霍特姆 (Hattum) 勃兰肯伏尔脱 (Blankenvoort N.V.)、阿姆斯特丹斯切 (W.V. Amsterdamsche)、白拉斯脱 (Ballast)、密脱却宾 (Maatschappij) 设计和建造 (伦敦水泥和混凝土协会供稿)。

## 第二章 梁式上部结构： 连续梁分析

### 2.1 引言

这一章所涉及的桥梁上部结构为简支梁或连续梁。在回顾了上部结构的形式之后，这里对有关梁的弯曲和扭转的弹性理论再作一扼要叙述，拟将基本理论简要提示一下；在这些理论中，本书所述的荷载分布的分析均以此为根据，而且广泛地应用于各种结构，这个课题不能详细叙述，因此在书末列出若干详细叙述了这些内容的参考书。

### 2.2 结构类型

图2.1a、b为梁式上部结构的典型型式。(图2.1a)是最简单的型式，简支于三个支座上，因而对于弯曲和扭转是静定的。在(图2.1b)中具有两个成双的四个支座，上部结构对于弯曲是静定的，但对扭转则否。多跨的桥梁常常建成为如(图2.1c)所示简支型式，或如(图2.1d)所示连续型式，当支点的稳定性由于沉降或地震而导致不确定时，则(图2.1c)所示静定型式是有利的。一般来说，多跨桥梁连续式上部结构较好，因为可以做到较大的跨高比，而且车道表面不会因节缝而成折线。其它联接型式的桥跨布置则如图2.2所述。在施工期间，往往改变连接以便在施工过程中使上部结构成普通的静定梁或悬臂梁。然后，在活载作用和长



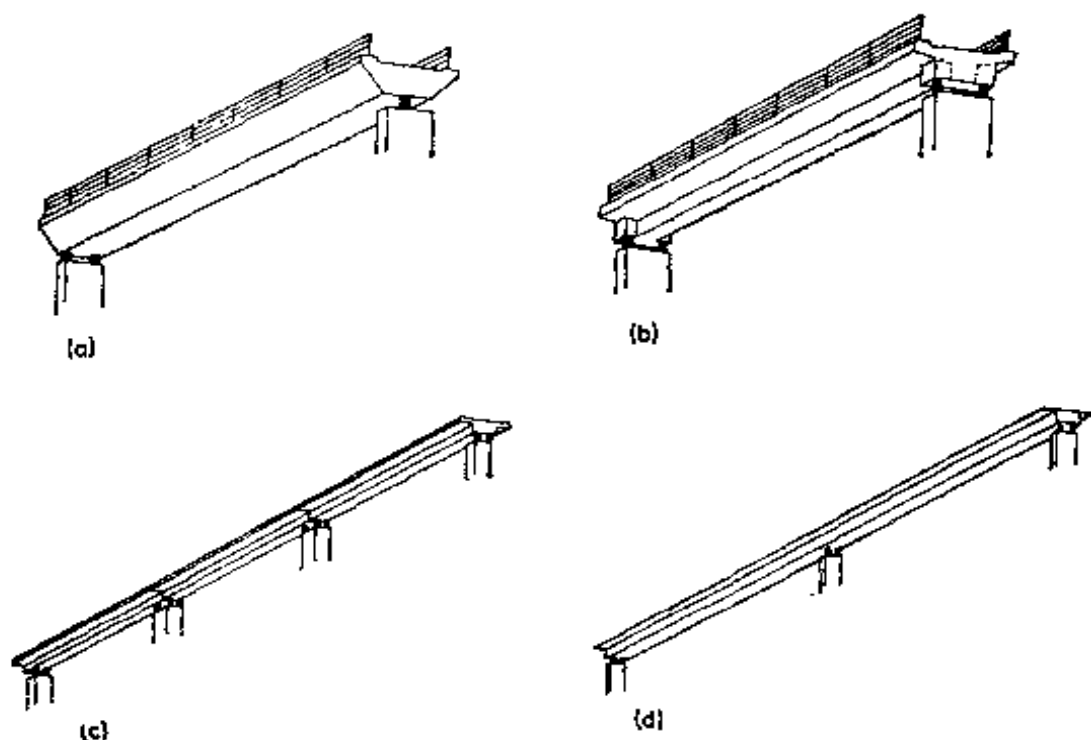


图2.1 桥梁力学性能

(a)对弯曲和扭转为静定梁；(b)仅对弯曲为静定梁；(c)多跨简支静定梁；(d)多跨连续超静定梁

期运营时部分地或全部地改造为连续的。

梁式上部结构的支座可布置为斜交的。如果它们相距较远而且不可能移动，则弯矩和扭矩在支点处明显地互相影响。要分析这种互相影响，使用手算法是麻烦的，因为往往不可能使用连续梁程序，而必须使用如第四、五和九章所述的二维计算机分析方法。在曲线梁式上部结构中，沿其整个长度弯矩和扭矩是相互影响的，虽然手算是可能的，但如用第九章所述的二维分析方法就更方便些。

如果上部结构是接近直线的而支座正交或稍微斜交布置的情况，则在设计变截面多跨宽桥而上部结构时，往往适宜使用连续梁来分析。在这些条件下，沿跨度横截面上总弯矩和剪力的分布，实际上与具有同样总刚度而承受纵向荷载相

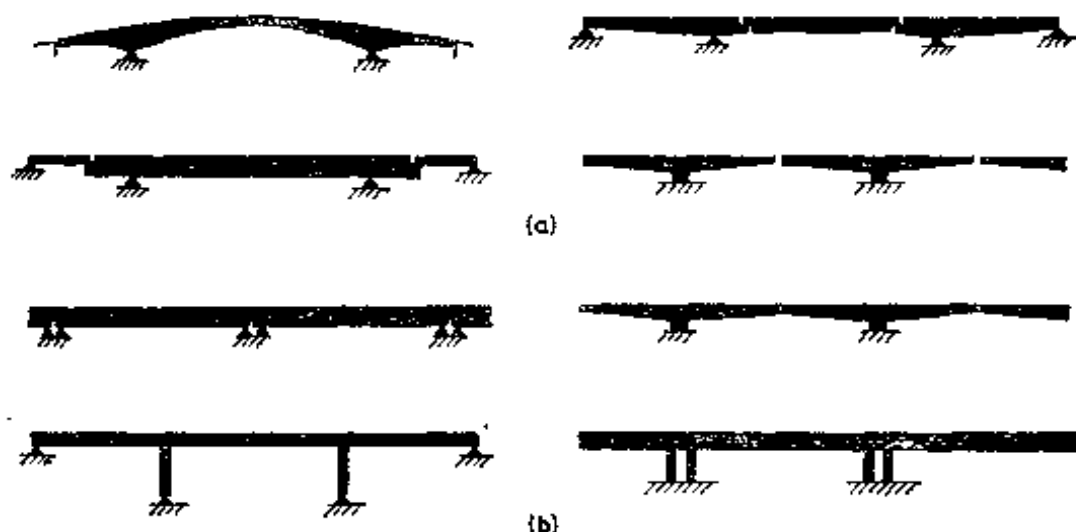


图2.2 其它桥梁受弯性能示例  
(a)静定；(b)超静定

同的单根梁一样。我们使用连续梁法分析由于恒载、施工荷载、预应力、温度、活载等的弯矩和剪力在纵向上的分布，然后用四个典型跨度的二维梁格来确定由于横向荷载和刚度所引起的弯矩、剪力以及伴随的扭矩的横向分布。

## 2.3 梁的弯曲

### 2.3.1 力的平衡

图 2.3 所示出的一个梁单元采用了右手座标系统，全书均如此，即： $Ox$  是沿跨度方向的水平轴， $Oy$  是横向水平轴， $Oz$  是指向下方的垂直轴。在这三个方向上的力分别以  $U$ ， $V$  和  $W$  表示之。挠度则为  $u$ ， $v$  和  $w$ 。

图2.3中的梁单元承受垂直荷载  $dW$ ， $W$  系沿梁长变化的。单元由端面上剪力  $S$  和  $S + dS$  以及弯矩  $M$  和  $M + dM$  而处于平衡。

从力在由垂直方向投影列出平衡方程式求解，我们得到：

$$dW = -dS \quad (2.1)$$

取绕  $Oy$  轴的弯矩，得到：

$$Sdx = dM$$

或

$$S = \frac{dM}{dx} \quad (2.2)$$

如图 2.3 所示，正剪力顺时针旋转，而正弯矩引起下弯挠曲。

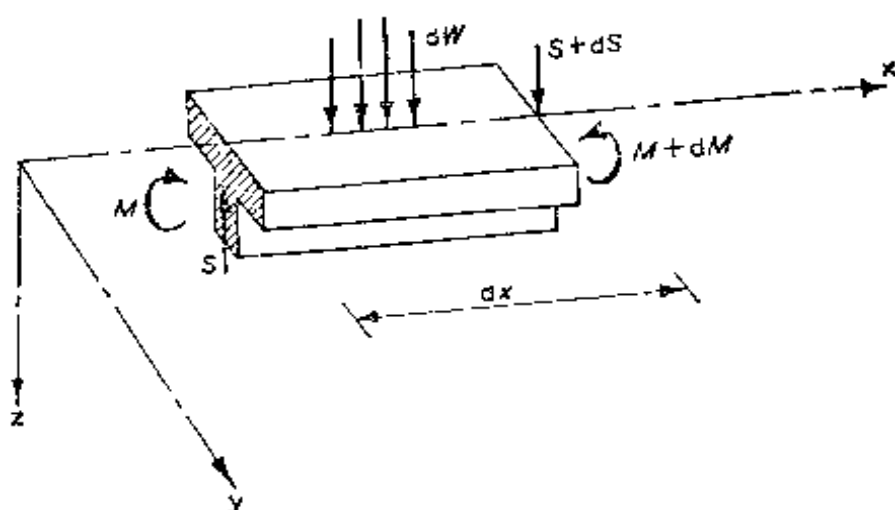


图2.3 梁的单元

简支梁承受如图2.4a的集中荷载时，沿梁长任何点的剪力和力矩可从平衡方程求出。由此可绘出如图2.4b和c所示的剪力图和弯矩图。在这些图中，正剪力和正弯矩绘于下方，对于其它一般的设计荷载相似的图形则列于本书附录A中。

### 2.3.2 应力分布

在梁的弹性纯弯曲理论中，假定受弯后截面仍然是平面，而且梁是由分离的线纤维构成，在这些纤维内纵向弯曲应力  $\sigma$  与纵向应变  $\epsilon$  成比例。从这些假定并参考文献 [1,2] 可以得到，截面上任何点的  $\sigma$  是和截面形心的中性轴至该点距离  $z$  成比例的，如图2.5所示。绕截面主轴的弯曲公式为：

$$-\frac{\sigma}{z} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R} \quad (2.3)$$

式中： $M$ 为截面上的总弯矩， $I$ 为截面绕中性轴的面积二次矩或惯性矩， $E$ 为弹性模量，而 $R$ 为由于弯曲形成的梁的曲率半径。

如果对于截面主轴来说，梁承受非法向荷载，则荷载必须分解成为垂直于两主轴的分量，然后分开考虑绕每根轴的弯曲，再把两个结果叠加在一起。

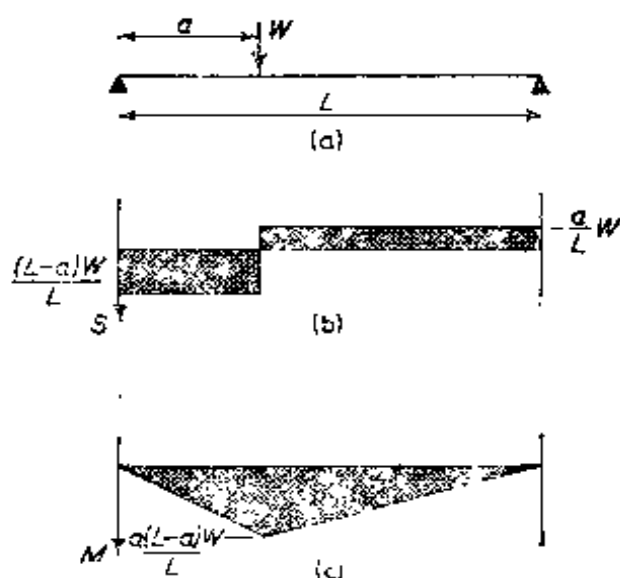


图 2.4

(a)荷载；(b)剪力图；(c)弯矩图

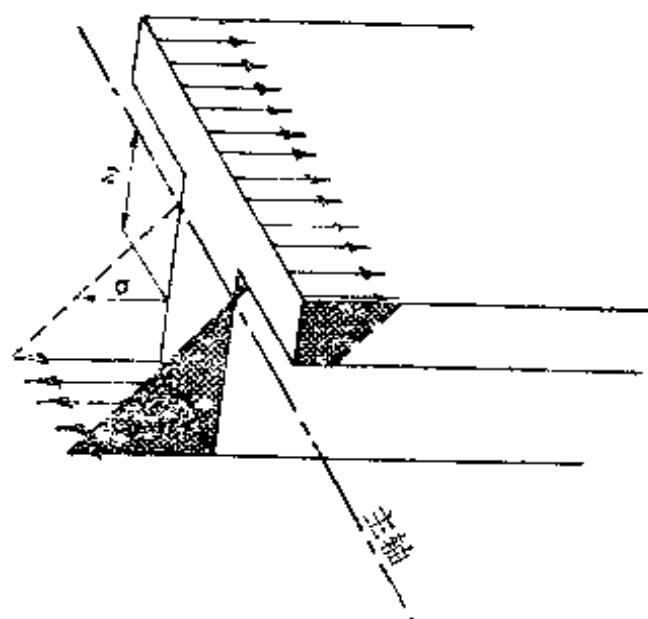


图2.5 横截面上的弯应力

由式 2.3

$$\bar{\sigma} = -\frac{Mz}{I}$$

如图2.6中所示，在横截面上任何点的剪应力可考虑通过 $a$ 点沿梁长度方向在梁单元 $abcd$ 内取 $ad$ 切片的力的平衡求得之。在端部 $ab$ 上的纵向拉力 $P$ 则为

$P = (\text{ab 上平均拉应力 } \bar{\sigma}) \times (\text{ab 面上的面积 } A)$

式中:  $\bar{z}$  为总截面形心至面积  $A$  形心的距离。

$$\therefore P = -\frac{MA\bar{z}}{I}$$

在单元  $ab$  端与  $cd$  端之间,  $P$  的改变值为  $dP$

$$dP = -\frac{dM \cdot A\bar{z}}{I}$$

对于作用在  $abcd$  上荷载来说, 则纵向平衡方程为:

$$\tau t dx = dP = -\frac{dM A\bar{z}}{I}$$

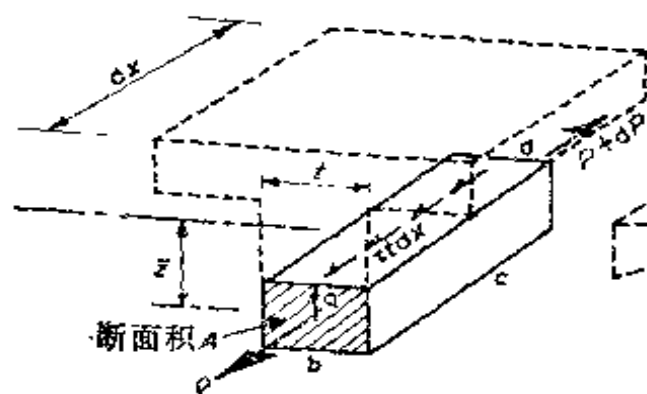


图2.6 沿梁单元切片上的力

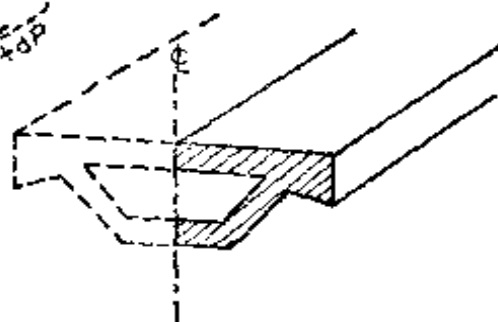


图2.7 作剪应力分析时所考虑的半个箱型上部结构

式中:  $\tau$  为沿  $ad$  方向的纵向剪应力。以  $S$  代替  $\frac{dM}{dx}$ ,

则得:

$$\tau t = -\frac{SA\bar{z}}{I} \quad (2.4)$$

在任何点上剪应力的平衡条件, 要求它们在互相垂直的方向上互等。因此, 式2.4所示  $a$  处的剪应力可视为  $ab$  和  $ad$  的两个方向上的剪应力。

在箱形上部结构中, 如图2.7所示, 截面为对称时, 其

中弯曲剪应力可由式 2.4 求出，但是，首先假想沿梁对称垂直轴（其中，那里没有纵向剪应力）纵向切取，然后假定上部结构的每一侧的截面惯性矩  $I$  等于总的上部结构横截面惯性矩之半，而负担一半的弯曲剪力。若截面为非对称的，上下翼缘要如第 5.4.1 节中所述办法切取，使得各个截面连同腹板的中性轴均在同一水平线上，并和总截面的中性轴相一致。

### 2.3.3 角变和位移

对于小挠度

$$R = - \frac{1}{\frac{d^2 w}{dx^2}}$$

由式 2.3 可以写成

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.5)$$

将上式积分得出：

$$-\frac{dw}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx \quad (2.6)$$

$$w = -\iint \frac{M}{EI} dx dx \quad (2.7)$$

若  $E$  和  $I$  沿梁长是常数，则  $-\frac{dw}{dx}$  和  $w$  可以由弯矩图的重

积分求出。图 2.8a 和 b 表示图 2.4 所示的梁  $-\frac{dw}{dx}$  和  $w$  图，系由图 2.4c 的弯矩图积分求得的。对于其它一般的设计荷载的转角和挠度图示于附录 A 中。若  $E$  和  $I$  沿梁长是变化的，由弯矩图求  $-\frac{dw}{dx}$  和  $w$  时，在积分之前必须除以  $EI$ 。

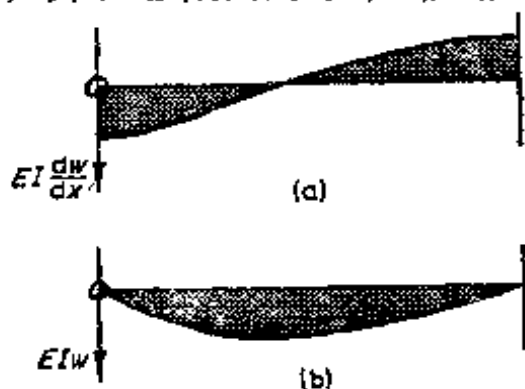


图 2.8 图 2.4 所示荷载作用时的角变位移图  
(a) 角变图；(b) 位移图

### 2.3.4 用角变位移方程分析连续梁

与上述的简支梁不同，连续梁一般在支点处弯矩不是零。图 2.9 表示连续梁的一跨（或跨间的一部分）承受端弯矩  $M_{12}$ 、 $M_{21}$  和剪力  $S_{12}$ 、 $S_{21}$ ，以及端位移  $w_1$ 、 $\theta_1$  和  $w_2$ 、 $\theta_2$ 。在图 2.9 和式 2.8、2.9 中，端弯矩顺时针为正，端剪力向下为正。对于这些方程来说，按惯例这些符号取下挠为正，以便弯矩和剪力可以用于平衡方程中，而无须再考虑它们在梁端处的作用方向。

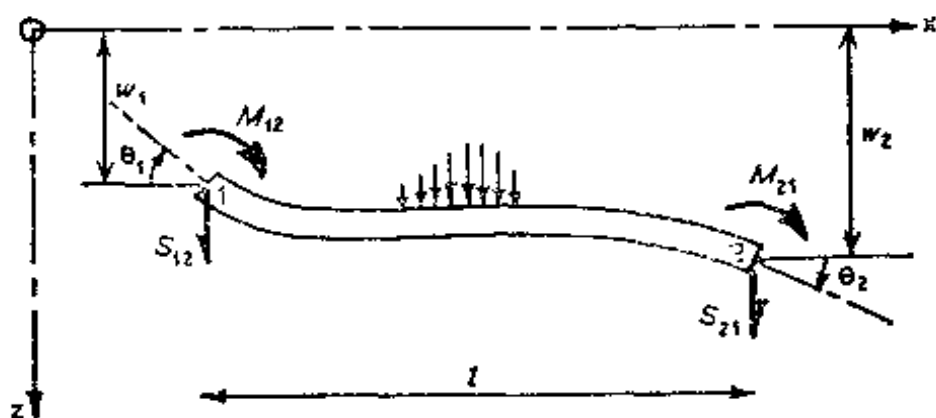


图 2.9 连续梁梁段的端部力与位移

式 2.6 和 2.7 为图 2.9 的梁端部的力和位移，由下列的角变位移方程系得到力与挠度的关系：

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= M_{12FE} + \frac{EI}{l} \left[ 4\theta_1 + 2\theta_2 + \frac{6}{l} (w_1 - w_2) \right] \\
 M_{21} &= M_{21FE} + \frac{EI}{l} \left[ 2\theta_1 + 4\theta_2 + \frac{6}{l} (w_1 - w_2) \right] \\
 S_{12} &= S_{12FE} + \frac{6EI}{l^2} \left[ \theta_1 + \theta_2 + \frac{2}{l} (w_1 - w_2) \right] \\
 S_{21} &= S_{21FE} - \frac{6EI}{l^2} \left[ \theta_1 + \theta_2 + \frac{2}{l} (w_1 - w_2) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

若删去  $M_{12FE}$ 、 $M_{21FE}$ 、 $S_{12FE}$  和  $S_{21FE}$  项等于零，则式 2.8 给出一段梁沿梁长没有荷载并以梁端变位表示的梁端的力。若梁段间有荷载，则其效果由  $M_{12FE}$  各项表示，若端部是刚性固结，即  $w_1 = w_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ ，则  $M_{12FE}$  等项即等于作用在梁端的力。图 2.10 表示一固端梁从距端部  $x$  处承受集中荷载  $W$ 。此梁在固端处的弯矩和剪力为：

$$\begin{aligned} M_{12FE} &= - \frac{W(l-x)^2x}{l^2} \\ M_{21FE} &= \frac{Wx^2(l-x)}{l^2} \\ S_{12FE} &= - \frac{W(l-x)^2(l+2x)}{l^3} \\ S_{21FE} &= - \frac{Wx^2(3l-2x)}{l^3} \end{aligned} \quad (2.9)$$

对于分布或变量荷载，固端力可由式 2.9 积分求得。



图 2.10 固端弯矩和剪力

当梁的剪切变形显著时，式 2.8 修正为下式所示[3]：

$$\begin{aligned} M_{12} &= M_{12FE} + \frac{EI}{l} \left[ \frac{(1+j)}{(1+4j)} 4\theta_1 + \frac{(1-2j)}{(1+4j)} 2\theta_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1+4j)} - \frac{6}{l} (w_1 - w_2) \right] \\ M_{21} &= M_{21FE} + \frac{EI}{l} \left[ \frac{(1-2j)}{(1+4j)} 2\theta_1 + \frac{(1+j)}{(1+4j)} 4\theta_2 \right] \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{(1+4j)} - \frac{6}{l} (w_1 - w_2) \Big] \\ S_{12} = S_{12FE} + \frac{6EI}{l^2} \left[ \frac{1}{(1+4j)} \theta_1 + \frac{1}{(1+4j)} \theta_2 + \frac{1}{(1+4j)} \right. \\ \left. - \frac{2}{l} (w_1 - w_2) \right] \\ S_{21} = S_{21FE} - \frac{6EI}{l^2} \left[ \frac{1}{(1+4j)} \theta_1 + \frac{1}{(1+4j)} \theta_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{(1+4j)} - \frac{2}{l} (w_1 - w_2) \right]$$

式中:

$$j = \frac{3EI}{l^2 GA}$$

$$G = \text{剪切模量} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$A$  = 橫截面面积或截面受剪面积。

式2.8和2.9仅应用于具有  $EI$  为常数的梁。对于加宽梁和加腋梁可以写出相似的方程式; 参考文献〔3〕列有适用图表。在计算机分析中, 通常把加宽梁考虑为一些逐渐减短的等截面直杆连成的组合体。每个直杆就可由式2.8、2.9导出。

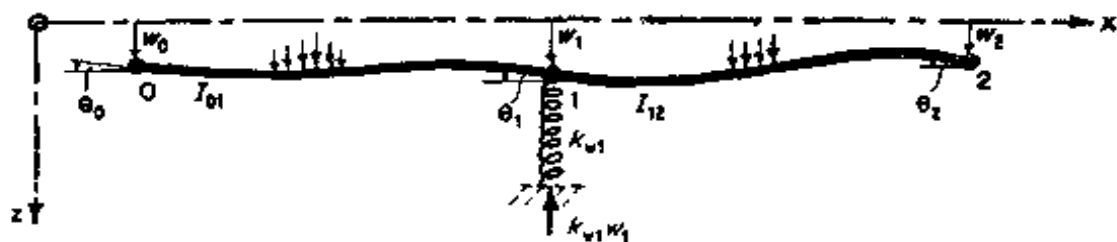


图2.11 两跨连续梁上部结构

由图2.11所示任意支承的连续梁节点1处的垂直力和平衡，可以得到两个方程式：

$$\begin{aligned} a_{01}w_0 + a_{11}w_1 + a_{12}w_2 - b_{01}\theta_0 + b_{11}\theta_1 + b_{12}\theta_2 + S_{10FE} \\ + S_{12FE} = 0 \\ b_{01}w_0 + b_{11}w_1 - b_{12}w_2 + c_{01}\theta_0 + c_{11}\theta_1 + c_{12}\theta_2 + M_{10FE} \\ + M_{12FE} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

式中：

$$\begin{aligned} a_{01} &= -\frac{12EI_{01}}{l_{01}^3} & b_{01} &= \frac{6EI_{01}}{l_{01}^2} & c_{01} &= \frac{2EI_{01}}{l_{01}} \\ a_{11} &= -a_{01} - a_{12} + k_{w1} & b_{11} &= -b_{01} + b_{12} \\ c_{11} &= 2c_{01} + 2c_{12} + k_{\phi 1} \end{aligned}$$

$k_{w1}$  和  $k_{\phi 1}$  为支点1处的垂直和转动刚度。对于其它支点也可以写出相似的两个刚度方程式，因而对于  $N$  个支点就有  $2N$  个未知挠度的  $2N$  个方程式。解出这些方程式就得出挠度，然后，把这些挠度代入式2.8中就得到沿跨度的弯矩和剪力。如下所述的那样，若支点在抵抗垂直方向或旋转方向上是刚性的束时，则未知挠度和方程式的数目可以减少。

上述的刚度方程式提供较简单的连续梁分析方法编制台式计算机的程序。这种计算机通常可以解出相当数量的联立方程式。下面将以实例说明之。当然，也可参考文献〔3〕，利用力矩分配法手算求解。

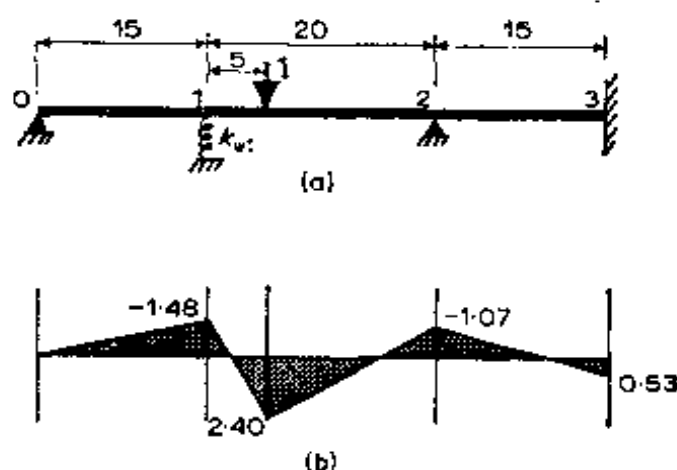


图2.12 三跨连续梁的弯矩

### 实例

图2.12a 示出一座三跨桥梁，支点0和2为铰支，垂直方向为刚性的，支点1为弹性支承，垂直刚度为  $k_{w1} = 1000$  力/单位挠度，而支点3为固定支承， $EI = 10000$ 。

从式 2.9 得：

$$S_{01FE} = S_{10FE} = S_{23FE} = S_{32FE} = M_{0(FE)} = M_{10FE} = M_{23FE} = M_{32FE} = 0$$

$$S_{12FE} = - \frac{1(20-5)^2(20+2 \times 5)}{20^3} = -0.844$$

$$S_{21FE} = - \frac{1 \times 5^2(3 \times 20 - 2 \times 5)}{20^3} = -0.156$$

$$M_{12FE} = - \frac{1(20-5)^2 5}{20^2} = -2.81$$

$$M_{21FE} = \frac{1 \times 5^2(20-5)}{20^2} = 0.94$$

刚度系数为

$$a_{01} = a_{10} = a_{23} = a_{32} = - \frac{12 \times 10000}{15^3} = -35.56$$

$$a_{12} = a_{21} = - \frac{12 \times 10000}{20^3} = -15.0$$

$$a_{11} = 35.56 + 15.0 + 1000 = 1050.56$$

$$b_{01} = b_{10} = b_{23} = b_{32} = \frac{6 \times 10000}{15^2} = 266.67$$

$$b_{12} = b_{21} = - \frac{6 \times 10000}{20^2} = -150.0$$

$$b_{00} = 0 + 266.67 = 266.67$$

$$b_{11} = -266.67 + 150 = -116.67$$

$$b_{22} = -150 + 266.67 = 116.67$$

$$c_{01} = c_{10} = c_{23} = c_{32} = -\frac{2 \times 10000}{15} = 1333$$

$$c_{12} = c_{21} = -\frac{2 \times 10000}{20} = 1000$$

$$c_{00} = 2 \times 0 + 2 \times 1333 = 2666$$

$$c_{11} = 2 \times 1333 + 2 \times 1000 = 4666$$

$$c_{22} = 2 \times 1000 + 2 \times 1333 = 4666$$

因为  $w_0 = w_2 = w_3 = \phi_3 = 0$ ，在刚度方程内无须计入这些数值，可以略去在 0，2，3 处对应于垂直力的平衡方程式和在 3 处对应的弯矩的平衡方程式。

根据支点 1 处的垂直力平衡及支点 0、1、2 处的弯矩平衡的条件，按式 2.10 写出下列各方程式：

$$1050.56w_1 - 266.67\theta_0 - 116.67\theta_1 + 1500\theta_2 - 0.844 = 0$$

$$-266.67w_1 + 2666\theta_0 + 1333\theta_1 = 0$$

$$-116.67w_1 + 1333\theta_0 + 4666\theta_1 + 1000\theta_2 - 2.81 = 0$$

$$150w_1 + 1000\theta_1 + 4666\theta_2 + 0.94 = 0$$

解之得：

$$w_1 = 0.00087 \quad \theta_0 = -0.000313 \quad \theta_1 = 0.000799$$

$$\theta_2 = -0.00040$$

把这些数值代回式 2.8 即得图 2.12b 的弯矩图。

### 2.3.5 按柔度系数分析连续梁

以前的刚度方程系假定结构在支点处具有某些未知挠度，然后依次按照每一支点的挠度导出平衡方程。在任何支点处弯矩或垂直力的平衡方程可以考虑为

$$\Sigma[(\text{由于在 } 2 \text{ 处单位挠度使点 } 1 \text{ 产生的力}) \times (\text{在 } 2 \text{ 处的挠度})] + \text{在 } 1 \text{ 处的施加荷载} = 0$$

其中： $\Sigma$  为 1 到  $n$  的所有挠度之和。

或

$$\Sigma[\text{刚度系数} \times \text{挠度}] + \text{施加荷载} = 0$$

另一种办法，用“系数”或“影响”系数法有时较为方便，现说明如下：将超静定结构（如图 2.13 所示的连续梁）拆除多余约束，使其成为静定的问题，然后求出作用于刀口两侧的等值而反向的  $X$  值，使所有刀口仍保持原闭合形状。为了求出未知力  $X$ ，应把和作用力  $X$  相对应的单位力及施加荷载在刀口处的位移计算出来。例如为了闭合刀口 1，可令全部荷载在刀口处的位移值之和为零，表达为方程式时则为：

$$\Sigma[(\text{由于单位作用力 } X_2 \text{ 对刀口 1 处的位移值}) \times X_2] + \text{由于荷载在刀口 1 处的位移值} = 0$$

其中： $\Sigma$  为 1 到  $n$  所有作用力之和。

或

$\Sigma[\text{柔度系数} \times \text{作用力 } X] + \text{由于施加荷载的位移值} = 0$   
同样写出各刀口的柔度方程式，解出  $X$ ，即得到相应于使刀口闭合应存在的作用力值。

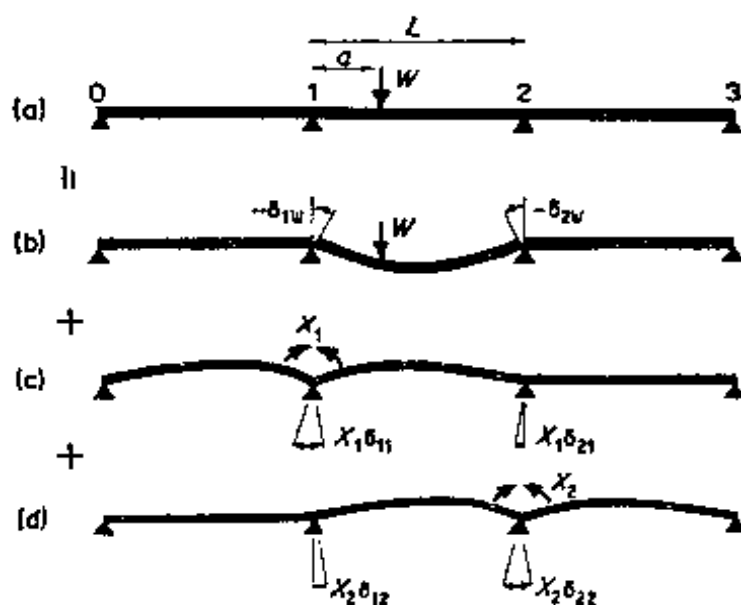


图2.13 连续梁等于拆除约束各梁的叠加

上述方程式的代数表达式为

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1w} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2w} &= 0 \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nw} &= 0\end{aligned}\quad (2.11)$$

其中:  $\delta_{ik}$  = 由于单位作用力  $X_k$  对刀口  $i$  处的位移值,

$\delta_{iw}$  = 由于施加荷载对刀口  $i$  处的位移值。

由弯矩应变能〔4〕, 可以表达为

$$\begin{aligned}\delta_{12} &= \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx \\ \delta_{1w} &= \int \frac{m_1 m_w}{EI} dx\end{aligned}\quad (2.12)$$

其中如图2.14所示,  $m_1$  和  $m_2$  分别为基本结构由于作用力  $X_1 = 1$  和  $X_2 = 1$  时的弯矩, 而  $m_w$  为基本结构由于施加荷载的弯矩, 对于普通弯矩图的  $\int m m dx$  的积分值列于附录 A 图 A.1 中。其应用方法则如下所述。

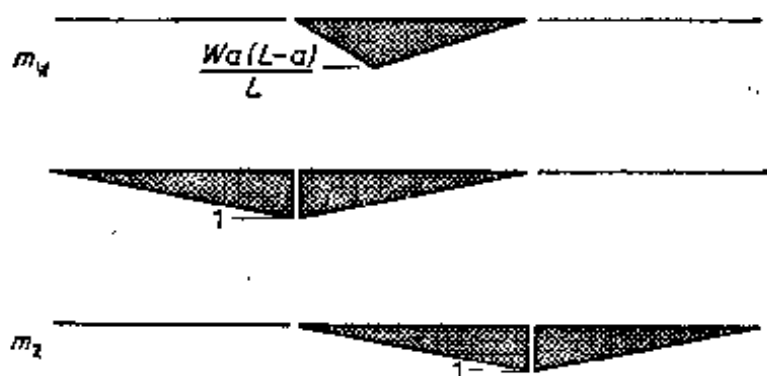


图2.14 图2.13所示施加荷载及单位作用力的弯矩图

实例:

图2.15表示一座四跨桥梁上部结构, 在第二跨跨中附近有集中荷载作用。图2.15b表示结构在支点1, 2和3处拆除约束时在荷载作用下的弯矩图。图2.15c-e表示由于单位作用力在点1, 2和3处引起的相应的弯矩图  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , 由附

录 A 得到:

$$\delta_{11} = \left( -\frac{10}{3} + \frac{15}{3} \right) \frac{1}{EI} = \frac{8.33}{EI}$$

$$\delta_{12} = \left( -\frac{15}{6} \right) - \frac{1}{EI} = -\frac{2.5}{EI} \quad \delta_{13} = 0$$

$$\delta_{22} = \left( \frac{15}{3} + \frac{15}{3} \right) \frac{1}{EI} = \frac{10}{EI}$$

$$\delta_{23} = \left( \frac{15}{6} \right) - \frac{1}{EI} = \frac{2.5}{EI}$$

$$\delta_{33} = \left( \frac{15}{3} + \frac{10}{3} \right) - \frac{1}{EI} = \frac{8.33}{EI}$$

$$\delta_{1w} = \frac{15}{6} \times 3.33 \times 1 \times (1 + 0.66) \times \frac{1}{EI} = \frac{13.87}{EI}$$

$$\delta_{2w} = \frac{15}{6} \times 3.33 \times 1 \times (1 + 0.33) \times \frac{1}{EI} = \frac{11.1}{EI}$$

因此, 柔度方程可以写为 (略去  $1/EI$ ) :

$$8.33X_1 + 2.5X_2 + 13.87 = 0$$

$$2.5X_1 + 10X_2 + 2.5X_3 + 11.10 = 0$$

$$2.5X_2 + 8.33X_3 + 0 = 0$$

答案即为支点上的未知弯矩:

$$X_1 = -1.42 \quad X_2 = -0.82 \quad X_3 = +0.24$$

这些弯矩表示在图 2.15<sup>f</sup> 中。

必须注意: 在支点处拆除弯矩约束不是唯一拆除约束的方法。也可以撤去支点 1, 2 和 3, 使上部结构的跨径成为从 0 到 4 的简支梁。作用力  $X_1$ ,  $X_2$  和  $X_3$  将是垂直力, 而在支点处垂直挠度则应为零 (或挠度等于支点柔度  $\times$  垂直反力)。

对一个特定的问题，究竟选择柔度法或刚度法，这就取决于结构形式，支点和荷载情况以及设计者感到刚度法或柔度法那个较易而定。一般来说，刚度法应用的比较广泛的，而且易于使用计算机程序。两种方法的详细叙述见参考文献〔5〕。

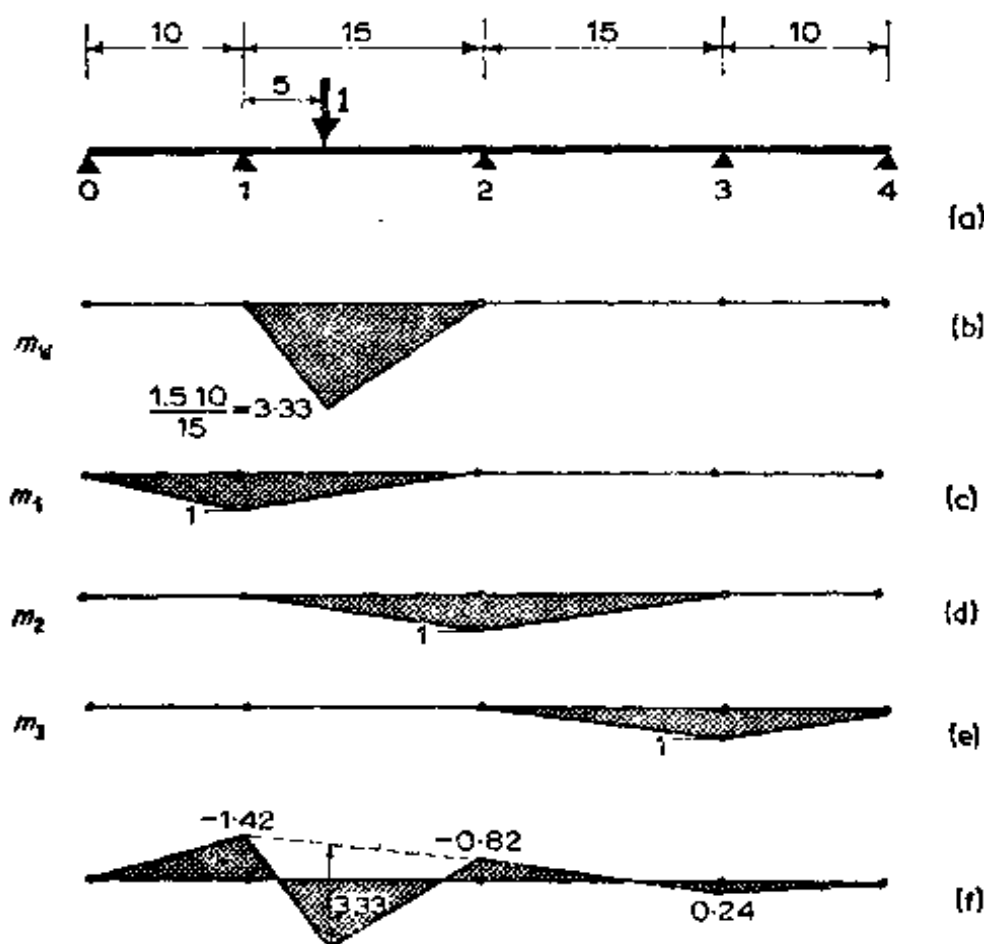


图2.15 连续梁的柔度分析  
(a)荷载；(b)荷载弯矩图；(c-e)单位力的弯矩图；(f)最后弯矩图

### 2.3.6 多跨梁

在分析等截面、接近等跨的连续梁过程中，设想用大约0.87倍实际长度的单跨来代替相邻无荷载跨的跨径，这样可减少计算工作量，如图2.16b所示。对于已缩减结构(reduced structure)的外支点的计算弯矩将是接近原结构的弯



矩。确定了这个弯矩值，可以简单地从受载区外略去的支点开始，依次为每一支点弯矩是前一支点弯矩之一0.27倍而求得如图2.16c所示。

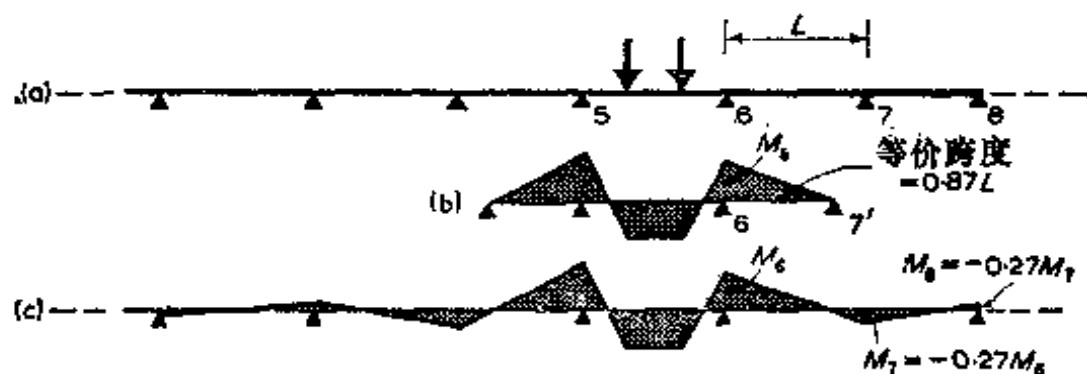


图2.16 连续梁的近似分析  
(a)原型；(b)已缩减的结构 (reduced structure) 的近似分析；(c) 荷载在无载区产生的弯矩图

## 2.4 梁的扭转

### 2.4.1 扭矩的平衡

在图2.3中，垂直荷载  $dW$  系作用在梁的中心线上，完全由剪力  $S$  和弯矩  $M$  保持平衡。若垂直荷载  $dW$  置于偏心位置，如图2.17所示，则在单元端部额外产生扭矩  $T$  及  $T + dT$  以保持绕纵向轴  $Ox$  的力偶的平衡，取绕  $Ox$  轴的力矩，则得

$$dT = ydW \quad (2.13)$$

式中  $y$  为荷载对中心线的偏心距。若梁没有对称的垂直轴，则  $y$  将从剪力中心量起[1,2]。由于大多数梁式上部结构是对称的，对这种复杂问题就不作进一步讨论了。

图2.18a 表示一简支梁式上部结构，在端点2处有两个支座，而在端点1处有一个支座。在接近跨中处有偏心荷载  $W$  作用使梁承受扭矩。由于端点1仅有一支座，故无扭矩可以

传递到支点去。为了求出任一横截面的扭矩  $T$ ，可以求出该梁左边一段绕  $Ox$  的力矩。由这个方法可得出如图 2.18b 所示的扭矩图。

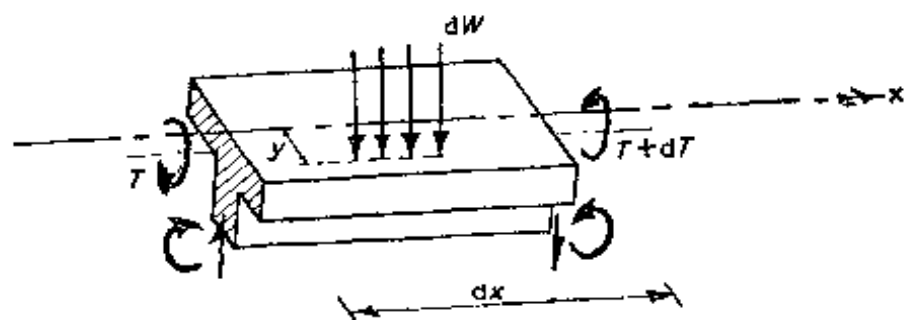


图2.17 梁单元的扭转

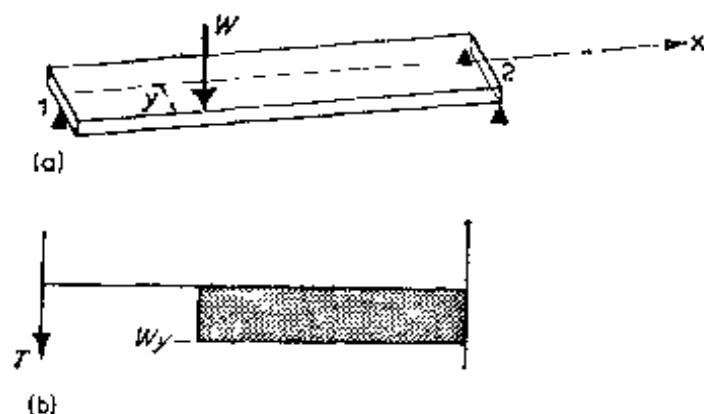


图2.18 扭矩图

(a)梁承受偏心荷载；(b)扭矩图

必须注意：当梁仅有一对支座抗扭时，它在受扭下就是静定的。图2.19示出梁的各种不同支座布置。它们是：对弯曲和扭转均为静定，对扭转为静定但对弯曲为不静定，对弯曲为静定但扭转为不静定，以及在弯曲和扭转均为超静定。若各对支座布置与纵轴成直角，则弯曲和扭转可以分开考虑梁的平衡（和分析）。然而若有一对支座在桥墩上布置成斜的，则桥墩处的弯矩和扭矩将相互影响，分析方法就相当复杂，最好使用第四章所述的二维梁格法。但是不在一条直线的三个支座的梁的情况就较简单，因为各反力可取绕两根轴

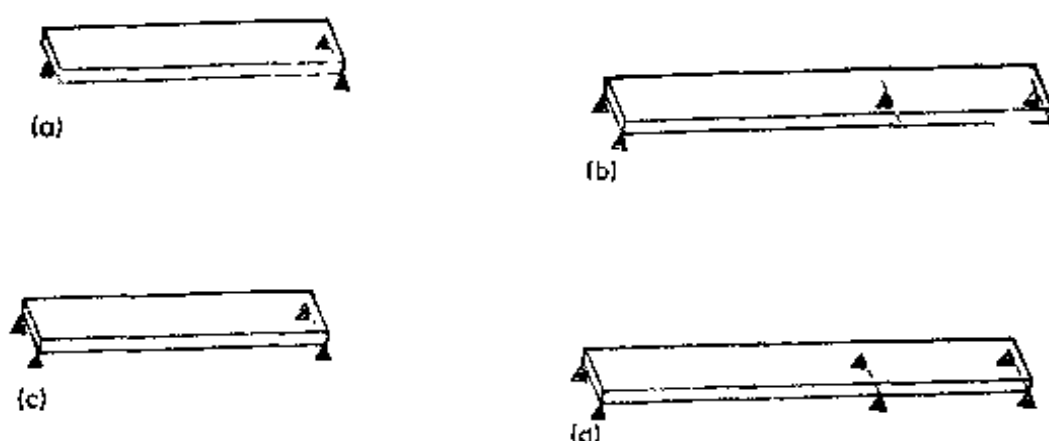


图2.19 扭转时梁的受力性能

(a)对弯曲和扭转均为静定；(b)仅扭转为静定；(c)仅弯曲为静定；  
(d)对弯曲和扭转均为超静定

的力矩而求得。

## 2.4.2 扭矩—扭角的关系

为了求出如图2.20所示具有四个支座的梁的扭矩分布，则需知其某些变形性能。若梁具有均匀抗扭刚度，则简单的按照物理性能即可推导出解答。

当扭矩  $T$  作用在梁单元上，它使单元在两端间绕  $Ox$  扭转成一相对扭角  $d\phi$ 。对于弹性材料，相对扭角的大小与扭矩成比例，可得出关系式为。

$$T = -CG \frac{d\phi}{dx} \quad (2.14)$$

式中： $C$  为截面的抗扭常数，下面将讨论；

$G$  为剪切模量  $= \frac{E}{2(1+\nu)}$ ，其中  $\nu$  为泊松比。

$$d\phi = - \frac{T}{CG} dx$$

$$\phi = - \int \frac{T}{CG} dx \quad (2.15)$$

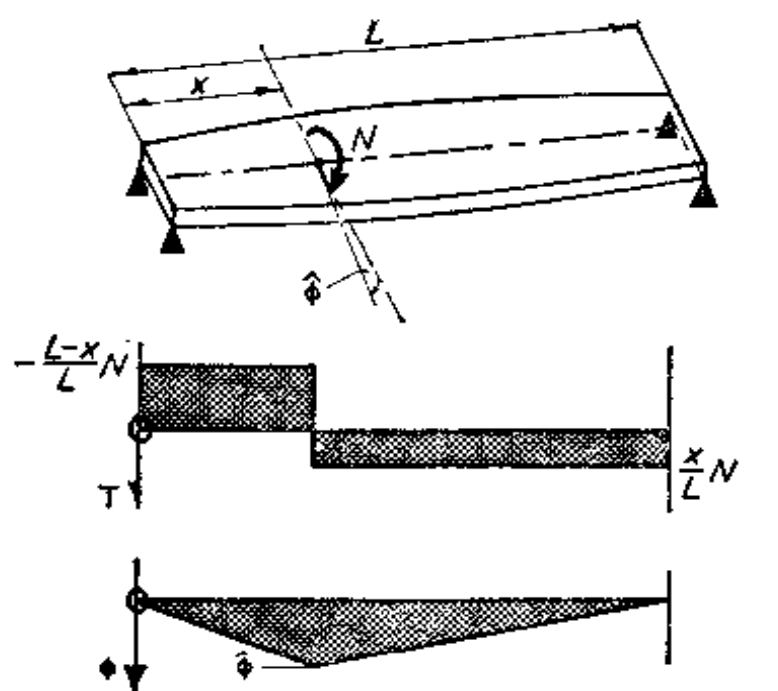


图2.20 两端约束梁的扭转  
(a)荷载；(b)扭矩图；(c)扭角图

沿梁长有均匀抗扭刚度  $CG$ ，并且两端扭转受到约束的情况，扭矩和扭角的分布可按照下面的方法求出。图2.20示出沿梁跨某点作用集中扭矩  $N$  的梁，因为在  $N$  和梁端之间别无其它荷载，故扭矩沿梁长必须是常数（虽然数值不同），如图2.20b所示。沿梁的长度扭角  $\phi$  的变化从一个支点为零开始至荷载作用点处为  $\hat{\phi}$ ，至另一支点回复为零。因为在荷载每一侧的扭矩是常数，因此  $d\phi/dx$  可从方程式2.14求出。由此，在图2.20c中的  $\phi$  图必须是三角形的，而在每一侧的  $d\phi/dx$  必须与每端至荷载作用点处的距离成反比。因而，作用扭矩  $N$  以两个端部至荷载作用点处的距离以分数形式成反比分布于两个支点处，亦即此集中作用的扭矩分布与集中垂直荷载的剪力分布相似，而  $\phi$  的分布则相似于弯矩的分布。因为分布荷载可以考虑为集中荷载的叠加，这就能够用简支梁的剪力和弯矩的分布直接模拟，而推导两个抗扭支

点间任何荷载所产生的  $T$  和  $\phi$  的分布，注意到如  $CG$  不是常数时，则不能使用这种模拟。

### 2.4.3 抗扭常数 $C$

抗扭常数  $C$  [通常称为圣维南 (Saint-Venant) 抗扭常数] 一般不像抗弯常数  $I$  是二次面积矩那样简单的横截面几何特性。在圆柱形中， $C$  等于极惯矩  $I_p$ 。然而，这是一种特殊情况，还可能引起误解，因为对于许多横截面外形来说， $C$  完全与  $I_p$  不同的，而且可出现数量级的差别。对于  $C$  的推导或扭转剪应力分布的分析是没有一个通用的规则，参考文献 [2 和 6] 简略列出各种横截面形状的等截面梁的弹性扭转理论。下一节将介绍适用于最普通的梁式桥梁的近似分析规则。

#### 无加腋角 (reentrant corner) 的实体横截面的 $C$ 值

圣维南导出一个近似的表达式，适用于无加腋角隅 (reentrant corner) 的横截面形状，也就是三角形、矩形、圆形、椭圆形等，其表达式为

$$C = \frac{A^4}{40I_p} \quad (2.16)$$

其中  $A$  = 横截面面积； $I_p$  = 极惯矩。

如图 2.21 所示的边长为  $b$  和  $d$  的矩形，可以简化为

$$C = \frac{3b^3d^3}{10(b^2 + d^2)} \quad (2.17)$$

而在薄条形情况  $b > 5d$  时，比较精确的公式为

$$C = \frac{bd^3}{3} \quad (2.18)$$

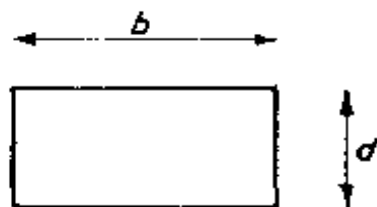


图 2.21 实体矩形横截面

矩形横截面上的最大剪应力发生于长边的中点，其值为：

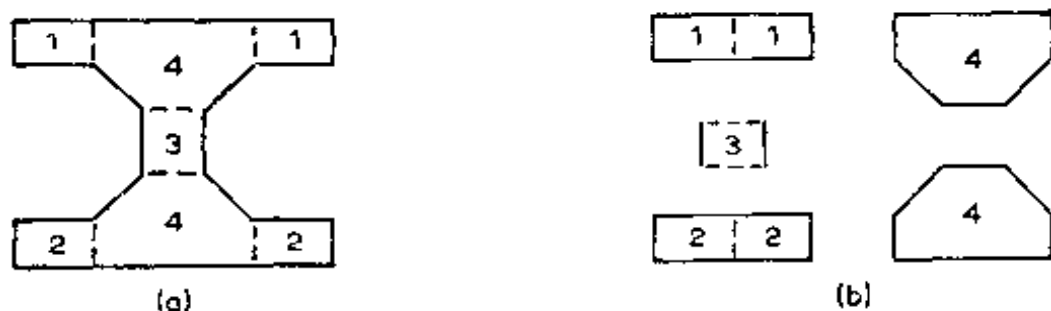


图2.22 具有加腋角隅的截面的划分

$$\hat{t} = \frac{T}{bd^2(0.333 - 0.125\sqrt{d/b})} \quad b > d \quad (2.19)$$

### 具有加腋角隅的实体横截面的 $C$ 值

若横截面有加腋角隅时，其  $C$  值比式2.16计算值要小得多。 $C$  值系按设想把横截面

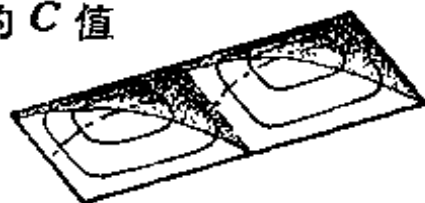


图2.23 矩形横截面的凸形薄膜

(如图2.22所示) 划分为无加腋角隅的形状，并把这些单元的  $C$  值相加而求得。当求这些值时，可复习参考文献[6]所叙述的普朗特 (Prandtl) 的薄膜比拟法，横截面的抗扭刚度与该截面相同形状的空洞所膨胀的凸形皂膜围成的体积成比例。任何点的剪应力是和皂膜的等高线的方向一致，其值与垂直于等高线方向的斜率成比例。若将横截面一分为二，薄膜实际上沿着分割处下降，如图2.23所示，因而大大地减少了它的体积，并阻止剪力流沿等高线从一处到另一处。因此，当如图2.22所示截面设想分割成为几个单元时，重要的是如何选择单元，使得它们在皂膜下的体积为极大。为了避免在假想的分割处出现皂膜高程为零，可在单元的分割处重新连接计算，如图2.22b所示。由于剪力流横贯腹板的两端，该处可以考虑为窄条形，它的  $C = \frac{bd^3}{8}$ 。图2.24表示将横截面任意划分成几个矩形，选择



图2.24 错误分割加劲角钢的截面

这些矩形时没有打算使皂膜下的体积为极大，所算出的  $C$  值仅为正确值的一半而已。

### 厚壁箱形截面的 $C$ 值

从最实用的目的来说，厚壁空腹截面的抗扭常数可以用计算外边界形状的  $C$  值减去内边界的  $C$  值求得，而且有足够精确度。

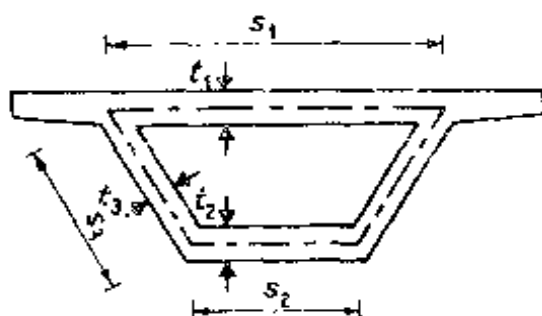


图2.25 薄壁箱形截面

### 薄壁箱形截面的 $C$ 值

如图2.25所示薄壁箱形截面的抗扭常数由下式计算：

$$C = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (2.20)$$

式中： $A$  为壁的中心线围成的面积，而  $\oint ds/t$  为壁的中心线长度除以壁厚沿周壁的积分。

周壁上任何点的剪应力由下式给出：

$$\tau = \frac{T}{2At} \quad (2.21)$$

式2.20只能应用于有一箱式或对称的两箱式的横截面。方程式可以应用于多格室的外边界，作为第一次近似值，但是较

精确的计算请参阅参考文献[2和6]。

## 2.5 用计算机分析连续梁

在连续梁分析上，有许多不同的计算机程序。一般来说，使用简单，输入截面特性到计算机的原始数据是直接了当的。要对所有情况提供通用的程序是不可能的，但是，对于梁的分析，方便的程序现成的有：简支梁、连续梁、等截面梁、变截面梁、弹性支承梁或弹性约束梁的分析。各种荷载分析包括预应力、下沉和温度可以由少数指令来执行。输出值则为弯矩和剪力的分布、位移、影响线或沿上部结构的最大和最小弯矩及剪力包络线。所有这些功能在单一的程序内必然不是通用的；事实上，按一般规律，程序愈包括得广泛，就愈难以使用。因而，值得指出：选择程序要适应问题的复杂性，除非使用者在特殊情况下能够精通某一程序，能够按照需要满足使用。

## 2.6 施 工 荷 载

活载作用的分析，一般简明的办法是把各种具有不同配置和不同集度的荷载作用到最终的结构上，并核算控制设计截面的弯矩和剪力。凭经验控制荷载是很易求得的，可是，连续梁式上部结构施工时，许多不同阶段下的恒载和预应力分析可能是复杂的；除非设计是十分保守，否则在设计过程中必要考虑到施工方法，反之在施工过程中，必须记住设计的方法。

在脚手架拆去之前，若结构从一端到另一端在脚手架上施工，则恒载弯矩须按恒载同时作用到连续梁上来计算，如



图2.26所示。另一方面，若桥梁系一跨接一跨地安装，如同史蒂文生的 (Stephenson's) 勃列坦尼亚 (Britannia) 箱型梁一样，将各跨连接后，并未产生支点恒载弯矩而降低跨中恒载弯矩。要降低这些弯矩，唯一办法就是调整由于相邻跨间连接端由自重所引起相对转角。这项工作可在连接处顶起一转角，然后用预应力螺栓栓紧，或如史蒂文生 (Stephenson) 那样，连接跨间临时抬高一端来完成，如图 2.27 所示。当各跨连接后，该箱梁弯矩就会改变，在施工过程中，每跨对于恒载则设计成简支的，但在使用时对于恒载及活载则为连续的。



图2.26 从一端至另一端，由于恒载同时作用在连续梁内的弯矩

多跨的就地灌注混凝土桥梁，常常是一跨接一跨或两跨带有悬臂同时施工，如图2.28所示。判断施工阶段产生恒载的最简单方法是考虑结构处于脚手架拆除前

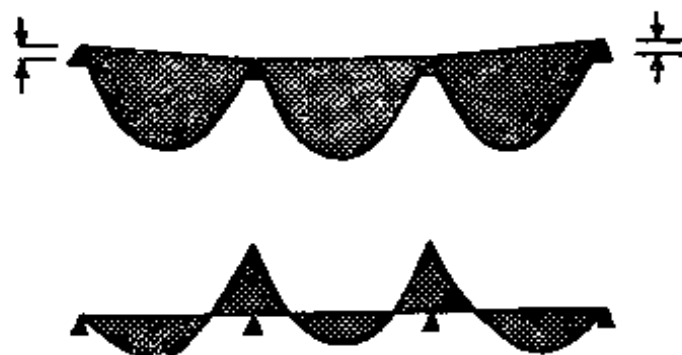


图2.27 用降低支点调整支点弯矩

后，则作用在已凝固的连续梁的荷载等于先前由脚手架所负担的荷载。图2.28的弯矩图，在支点处具有或大或小的弯矩，这是两跨同时施工的典型形式。若上部结构是在同一阶段内预加应力，当预应力承担了恒载（除接近支点处脚手架还负担一部分反力，一直到其弹性压缩消除为止）时，实际上脚手架已不起作用了。若预应力状态在每跨内是相同的，

则它产生与恒载弯矩相反的支点弯矩。实际上抵消了一个阶段接一个阶段施工的影响。预应力弯矩的分析在第十一章中讨论。

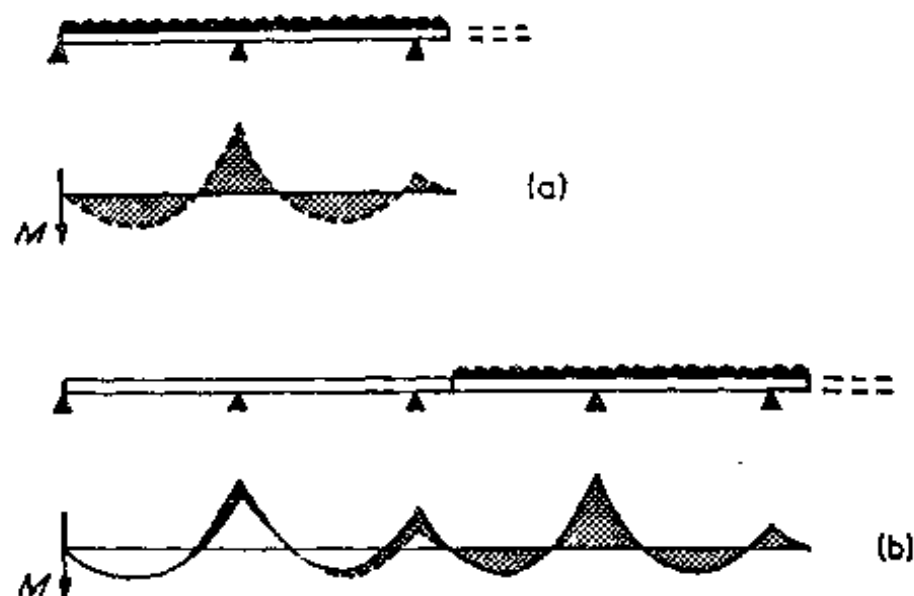


图2.28 两跨接两跨的施工法

## 2.7 弯矩重分布

在恒载和预应力连续作用一段时间后，大多数建筑材料发生徐变。这些性能可以视为上部结构用粘性材料制成，在一个时期后，由于施工工序引起的挠曲和曲率的形状被徐变引起整个结构的变形所掩盖。经过长时间徐变，保留在结构内的弯矩和剪力的分布趋向于如同结构在脚手架从一端到另一端同时施一样。这是因为梁的方程式 2.5 由于粘性性能改变了挠度变化率而不改变它的分布。因此，在多跨上部结构施工过程中，除了按每阶段的施工分析外，徐变极限影响可根据“同时施工”进行分析。

## 2.8 具有斜墩梁式上部结构

置于斜墩上的连续梁上部结构施加垂直荷载时,引起桥面梁内的变曲和压缩与侧移。在组合弯曲和轴向荷载的共同作用下,可能与那些从连续梁程序所求得结果有明显的不同,因而有必要作平面刚架分析。

### 参考文献

1. Case, J. and Chilver, A.H. (1959), *Strength of Materials*, Edward Arnold, London.
2. Oden, J.T. (1967), *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill, New York.
3. Lightfoot, E. (1961), *Moment Distribution*, E. & F.N. Spon, London.
4. Morice, P.B. (1959), *Linear Structural Analysis*, Thames and Hudson, London.
5. Coates, R.C., Coutie, M.G. and Kong, F.K. (1972), *Structural Analysis*, Nelson, London.
6. Timoshenko, S. and Goodier, J.N. (1951), *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York.

## 第三章 板式上部结构：梁格分析

### 3 引言

板式上部结构，在两维平面板内结构上是连续的，因此作用荷载由剪力、弯矩和扭矩的两维分布来支承。这些分布比那些按一维的连续梁来得复杂，这一章将介绍板单元的平衡和应力—应变性能的基本关系。因为对于一个实际的板式上部结构，基本方程不大可能求得精确解答，所以大多数用近似方法解决之，这就是梁格分析。在该分析中，上部结构用两维的梁格来代替。另一近似方法称为“有限元分析”，该法将在第十三章中叙述。在这个方法中，上部结构设想为分成许多小单元，在每个单元中可以写出近似的板弯曲方程，并求出全部解答。对于那些具有简单平面几何形状的板式上部结构借助图表分析，也经常用手算法。这些方法将在第十章中详述。然而，近年来对梁格程序的逐步改进，使得这种计算机方法比起表格法更广泛、快捷和易于理解。

### 3.2 结构类型

图3.1表示桥面板的某些普通类型。图3.1a为实体的钢筋混凝土板。在图3.1b中，则在板的高度范围内浇成空心来减轻重量，这种上部结构称为“空心板”。若空心的高度超过板的高度60%，则板不再象单块板那样而却与分格式上

部结构相似，其分析方法将在第五章中叙述。板式上部结构可以建造成组合式构造，如图 3.1c 和 d 所示。在图 3.1c 中用混凝土填充密排的各梁之间，顶部和底部配置连续的横向钢筋而构成整体板。在图 3.1d 中，上部结构用密排的箱梁构成，在横向上用后张法使板具有抗弯矩的连续性。

板式上部结构如图 3.1 所示时，则纵向和横向上具有相同刚度，此种板称之为“各向同性”。若刚度在两个方向上不同，如同图 3.1c 和图 3.1d 的上部结构一样，则该板称为“正交导性的”。

板式上部结构有时具有上伸及下伸式的加劲梁，如图 3.1a 所示。这种结构能够把作用在中央处的荷载分布到板的两侧，甚至作用在边缘处的荷载也能传递一部分至板上，而另一部分则传递至加劲梁。对具有加劲梁的上部结构提出

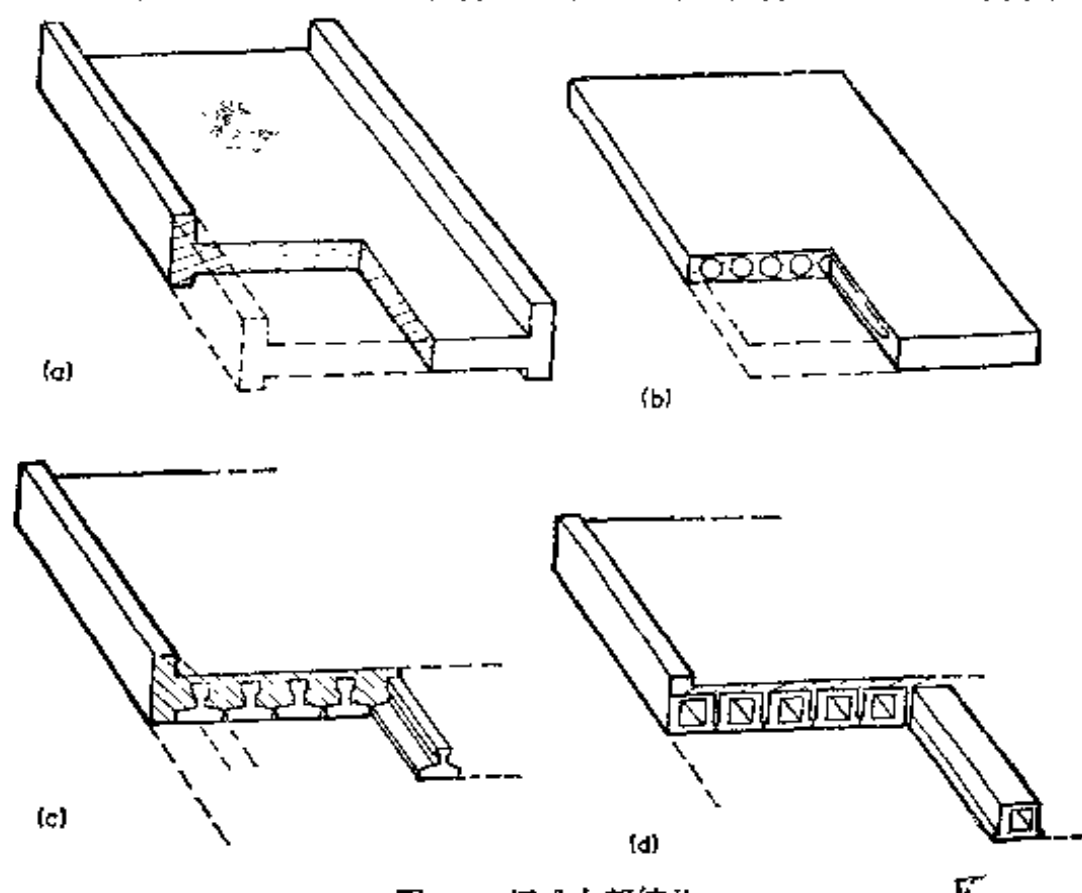


图 3.1 板式上部结构

(a)实体的；(b)空心的；(c)混合实体的；(d)混合空心的

精确分析的问题时，除非上伸或下伸部分较大以致加劲梁的中性轴与板的中面平面有明显的差值，使用后述的近似方法并不复杂。这种有上伸式加劲梁的槽形结构将在第八章中讨论。

桥梁的上部结构往往设计成与支点斜交，变截面或平面曲线式的。从形状来看，它的性能和精确分析是相当复杂的，但是如第九章所示，对于梁格分析上的效果来说，即使理论上复杂些，也比不方便好一些。

### 3.3 结构作用

#### 3.3.1 力的平衡

图3.2表示一个承受垂直荷载  $dW$  和内弯矩  $m$ 、剪力  $s$  和扭矩  $t$ （每单位宽）的板单元，此单元与板的相邻部分相互影响，可以得到：

$$-\frac{\partial m_y}{\partial y} dy = dm_y, \quad -\frac{\partial s_y}{\partial y} dy = ds_y \quad \text{等及}$$

$$W dx dy = dW$$

根据垂直方向投影和绕  $Ox$  和  $Oy$  轴取矩，列出平衡方程式，经过化简得到

$$-\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = -W \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} = s_x \quad (3.2)$$

$$-\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} = s_y$$

这些方程式与单根梁的方程式有明显差别。除了荷载作二维分配的明显不同外，方程式 3.2 表明剪力不是弯矩的简单微分（也就是说它不是弯矩图的斜率）。

在梁格分析中, 由于弯曲的  $\partial m_x / \partial x$  以及由于扭转的  $\partial t_{yx} / \partial y$  的不同分量, 以不同的方法表示, 一般定义为:

$$s_{Mx} = \frac{\partial m_x}{\partial x} \quad \text{和} \quad s_{Tx} = -\frac{\partial t_{yx}}{\partial y} \quad (3.3)$$

因而式3.2变为:

$$s_x = s_{Mx} + s_{Tx}$$

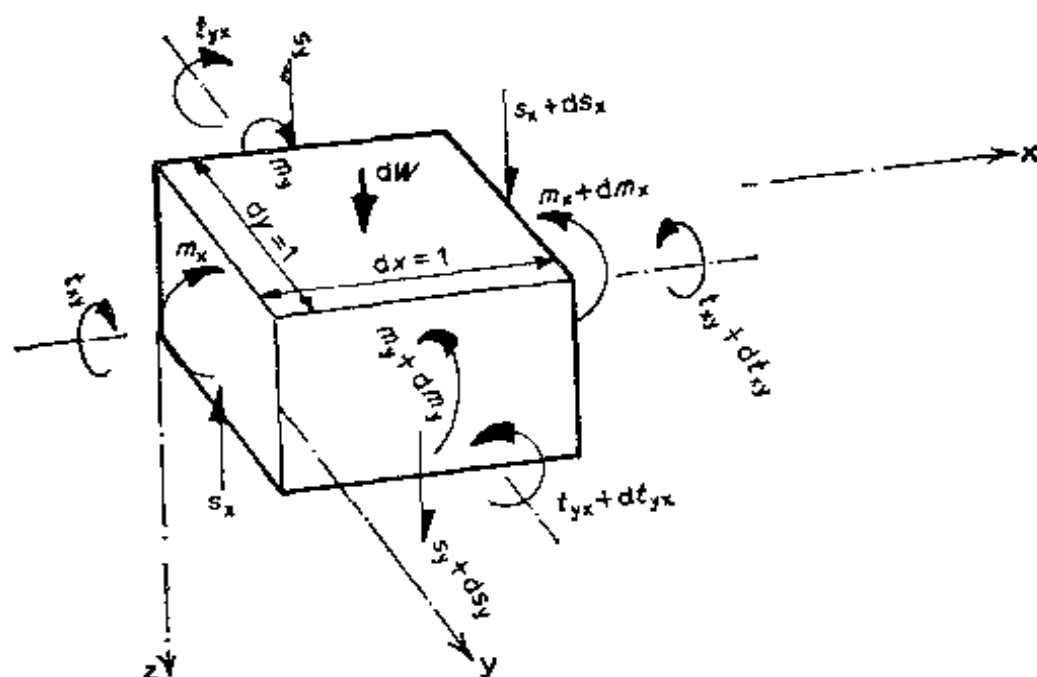


图3.2 板单元上的合力

在板单元的任何水平面上, 垂直  $Ox$  和  $Oy$  的平面上剪应力必需互等以维持平衡。因此, 在板单元的正交面上扭矩也应相等。

$$t_{xy} = t_{yx} \quad (3.4)$$

### 3.3.2 弯矩——曲率方程

板的弹性弯曲简单理论是和简单梁理论相同的假设为基础的。在板中垂直于中面的线仍然是直线, 因而应变与弯曲应力从中性轴起按距离成线性增加, 如图3.3所示。还有垂直

压应力也等于零。但它并不相似于简单梁，在一个方向上的弯曲压应力  $\sigma$  是与正交方向的压缩应变以及其本身方向的压缩应变有关系的，即：

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma_x}{z} &= -\frac{m_x}{i} = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( -\frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y} \right) \\ -\frac{\sigma_y}{z} &= -\frac{m_y}{i} = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( -\frac{1}{R_y} + \frac{\nu}{R_x} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

或

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{Ed^3}{(1-\nu^2)12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ m_y &= -\frac{Ed^3}{(1-\nu^2)12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

式中：

$z$  = 中性轴以下的垂直距离；

$i = d^3/12$  = 每单位宽度内板的惯性矩；

$d$  = 板厚；

$R_x$  =  $x$  方向上的曲率半径；

$E$  = 杨氏模量；

$\nu$  = 泊松比。

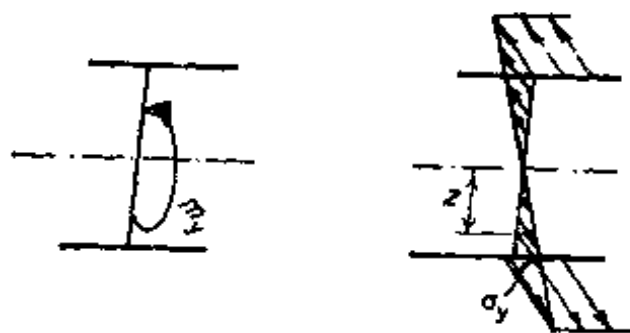


图3.3 弯应力分布图

在板单元内，扭转剪应力成线性分布，如图3.4中所示，应力  $\tau$  与距中性轴  $z$  成比例，因此

$$\frac{\tau_{xy}}{z} = \frac{t_{xy}}{i} = -\frac{E}{(1+\nu)} \left( \frac{1}{R_{xy}} \right)$$



$$t_{xy} = -\frac{Ed^3}{(1+\nu)12} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{Gd^3}{6} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.6)$$

式中:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \text{剪切弹性模量}$$

式3.6的  $t_{xy}$  可以写成:

$$t_{xy} = -cG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.7)$$

式中:  $c$  为板的每单位宽度的有效抗扭常数, 由下式给出:

$$c = \frac{d^3}{6} \text{ 每单位宽度} \quad (3.8)$$

每单位板宽的抗扭常数式3.8等于式2.18中薄条形梁的一半。这个差值是扭矩定义所不同的结果。若受扭的薄条形

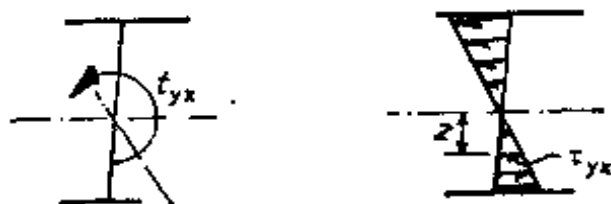


图3.4 剪应力分布图

梁(如图3.5所示)作为一根梁如第2.4节那样来分析, 则扭矩  $T$  为由于接近顶面和底面水平剪力流形成的扭矩以及由于接近两侧垂直的剪力流形成的扭矩两者之和。可是, 若图3.5的板状梁作为一块板来分析时, 则扭矩  $t_{xy}$  仅为由于接近顶面和底面的水平剪力流形成的扭矩。在边缘处垂直剪力流构成强大的局部的垂直剪力  $s_x$ 。这一对相反的垂直的剪力流提供一半的总扭矩值和式3.3所规定的横向扭矩,  $t_{yx}$  加入到图3.2所示力系中去。扭矩的两种定义虽然不同, 却是等值的。板在纵向扭转中只有“梁”的抗扭常数之半(因此应变能亦为其半)时, 则另一半的抗扭常数(和应变能)是属

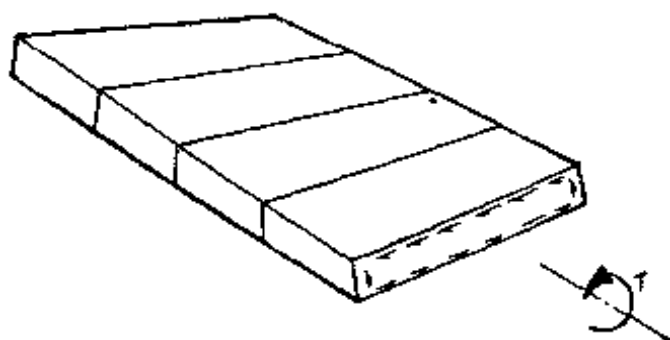


图3.5 板状梁的扭转

于横向扭转，在梁的分析中则不予考虑。

式3.5—3.8说明了各向同性板的关系，这种板的弹性性能可以由常数  $E$  和  $\nu$  来描述。若板是正交异性的，杨氏模量和泊松比在两个方向上均不同，因而弯矩曲率方程式则比较复杂。

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -D_x \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ m_y &= -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ t_{xy} &= -2D_{xy} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\}$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{E_x d^3}{(1 - \nu_x \nu_y) 12} \\ D_y &= \frac{E_y d^3}{(1 - \nu_x \nu_y) 12} \\ D_{xy} &= - \frac{E_x E_y d^3}{[E_x (1 + \nu_{yx}) + E_y (1 + \nu_{xy})] 12} \\ &= - \frac{G_{xy} d^3}{12} \\ &\approx - \frac{1}{2} (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$D_{xy}$  的表达式是由胡勃(Huber)[1]求出的近似式。

### 3.3.3 主弯矩和主应力

图3.6a所示的板单元具有垂直于  $Ox$  轴和  $Oy$  轴的两个面。该两个面分别承受弯矩和扭矩  $m_x$ 、 $t_{xy}$ 、 $m_y$ 、 $t_{yx}$  的共同作用。若板单元的两个面垂直于另外方向的两个轴，则弯矩和扭矩数值就不同。在一系列方向中有一特定方向的轴，此轴称为主方向，如图3.6b所示，在这两个面上不出现扭矩，而且弯矩  $m_I$  和  $m_{II}$  代表板内那一点的最大和最小弯矩。若  $\alpha$  为图3.6a的  $Ox$  轴和图3.6b的  $I-I$  轴间的夹角，则主弯矩  $m_I$  和  $m_{II}$  与  $m_x$ 、 $m_y$ 、和  $t_{xy}$  的关系由下式表达：

$$m_I = \frac{m_x + m_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

$$m_{II} = \frac{m_x + m_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

(3.10)

$$\tan 2\alpha = \frac{2t_{xy}}{m_x - m_y}$$

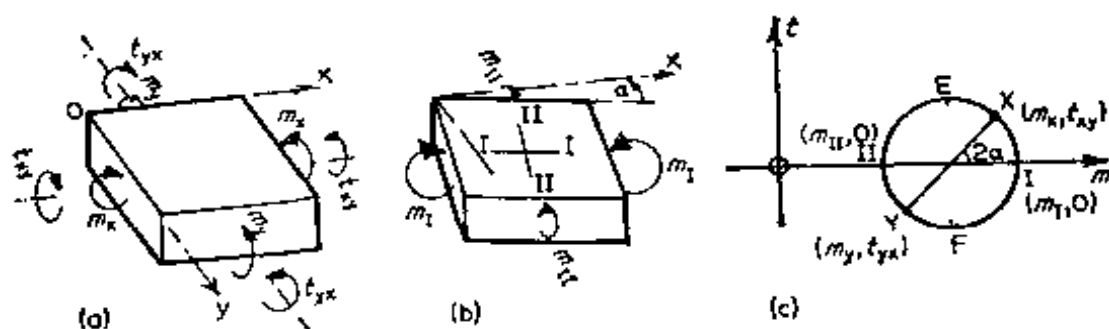


图3.6 主弯矩与莫尔 (Mohr) 弯矩圆

垂直于各座标轴的面上的弯矩和扭矩间的这种关系，可以用莫尔 (Mohr) 圆来表达，如图3.6c所示。取弯矩  $m$  和扭矩  $t$  作为座标轴（此处按右手螺旋法则定正值，即扭矩向

量指向单元中心, 因此  $t_{yx} = -t_{xy}$ , 则以点  $(m_x, t_{xy})$  及  $(m_y, t_{yx})$  分别为直径的相反端点绘出一圆。点  $(m_I, 0)$  和  $(m_{II}, 0)$  亦在直径的相反端而代表最大的和最小的主弯矩。注意到在板单元内座标轴的方向之间的偏角  $\alpha$  是在莫尔圆上用直径间倾角为  $2\alpha$  来代表的。最大的扭矩发生于圆上的  $E$  和  $F$  点上, 在该两点上的弯矩值是相等的, 而与  $m_I$ 、 $m_{II}$  为两相反端所作的直径成  $90^\circ$  角。在板单元内, 最大的扭矩发生于垂直于与主轴成  $45^\circ$  的面上。从圆的几何性质, 显然最大扭矩在  $E$  或  $F$  点为:

$$\hat{t} = \frac{m_I - m_{II}}{2} = \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + t_{xy}^2} \quad (3.11)$$

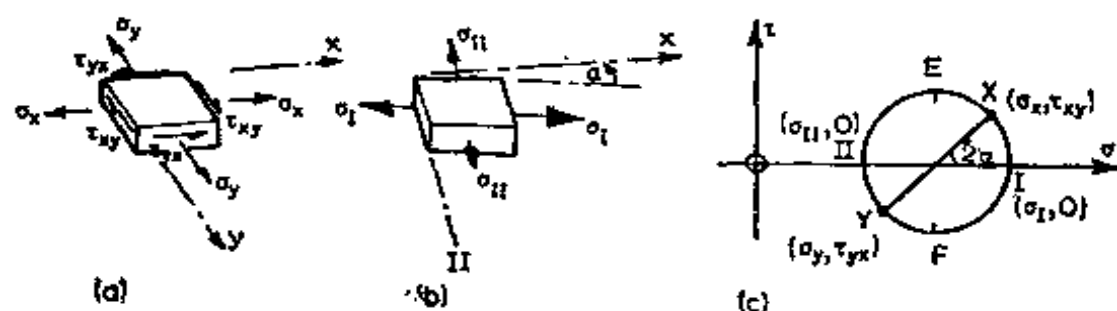


图3.7 主应力和莫尔应力圆

如图3.7中所示, 通过板内某一点的正交面上的拉应力和剪应力同弯矩及扭矩一样有着同样的平衡规律关系, 因此亦可使用莫尔圆。对于剪应力的符号, 惯例是绕单元体成顺时针方向者为正, 由此  $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ 。所以, 垂直于  $Ox$  轴和  $Oy$  轴的两个面上压应力和剪应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ , 以及与  $Oxy$  构成倾角  $\alpha$  的轴上主应力  $\sigma_I$ 、 $\sigma_{II}$  为下列关系式

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.12)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

最大剪应力作用在与主轴成  $45^\circ$  的平面上，并由下式给出

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_{11}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.13)$$

### 3.4 力分布的精确分析

使用方程式式3.1—3.9来分析板的弯矩等的分布是复杂的。在特殊荷载分布情况下，对于少数简单形状的板，曾求得精确的解答〔3—5〕，但是没有一般适用的精确解法。而且严格地说，桥梁上部结构是不满足各向同性或正交异性性能的假定的，随着简化结构作用的假定结果必需把结构细部描述为数学刚度 (mathematical stiffness)。因而一般来说，两者都不可能导出精确的数学方程式来代表一个结构，并且也不可能立刻解出方程式。然而，近似方法是有效的。它或者用近似数值法解出板的弯曲方程，或者用有限元法或梁格来代表上部结构的二维连续体，后一法由于计算机的出现而成为最好的实用方法；这方法对工程师来说有明确的物理概念的优点，而且具有代表整个结构不同刚度和支承体系的多种功能。

### 3.5 梁 格 分 析

梁格分析可能是最流行的借助计算机来分析桥梁上部结

构的方法，这是因为它易于理解和使用，比较节省，故在各种桥梁类型中广泛使用，已被认为是精确和有效的。此法首先由莱特福 (Lightfoot) 和绍柯 (Sawko) [6] 使用计算机来进行，它是用一个等效梁格来代表上部结构，如图 3.8 所示。为了分析的把分散在板的每一区段内的弯曲和抗扭刚度假定集中于最邻近的等效的梁格内。板的纵向刚度则集中于纵向梁内，而横向刚度则集中于横向梁内。理想地梁的刚度必须是这样，即当原型板和等效的梁格承受相等的荷载时，这两个结构的挠曲将是恒等的，而且在任一梁格内的弯矩，剪力和扭矩将等于该梁所代表的板部分的截面上应力的合力。事实上由于结构的两种类型的不同特征，这个设想只能是近似的，现概括叙述如下：

首先，板的任一单元的平衡要求扭矩在正交方向上是相等的，如式 3.4 所示，而且扭率  $\partial^2 w / \partial x \partial y$  在正交方向上也是相同的。在等效的梁格中，没有物理上和数学上的原理使扭矩和扭率在正交方向的节点上自动相等。然而，若梁格网格是相当细密（如图 3.9a 所示）梁格随着扭转而挠曲成一

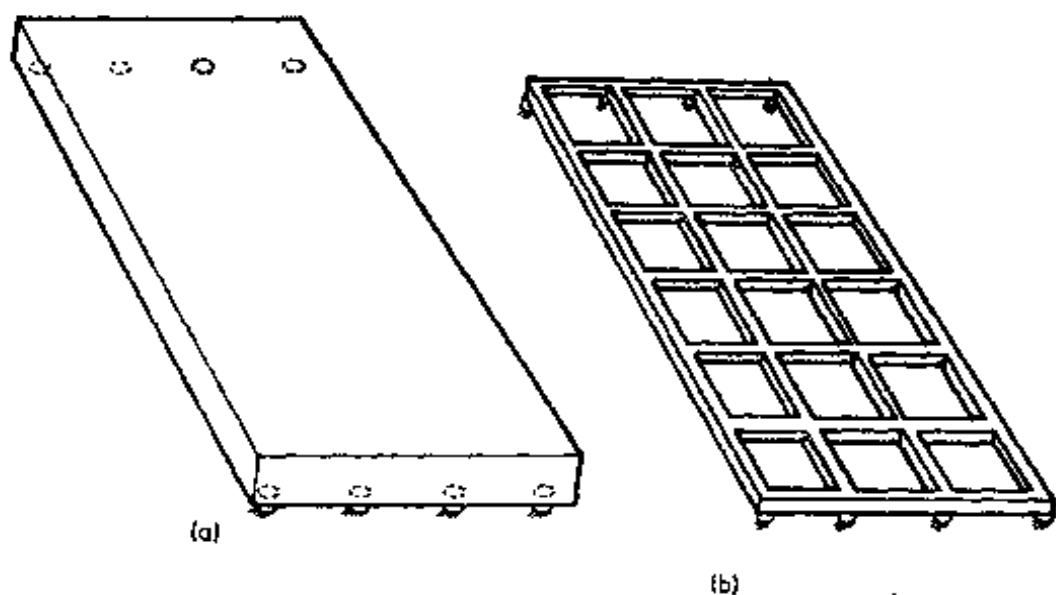


图 3.8 (a)原型上部结构；(b)等效梁格

光滑曲面，而在正交方向上近似相等（如两个方向上抗扭刚度相同，则扭矩将相等）。另一方面，若网格是相当稀疏如图3.9b所示，梁格挠曲将不成一光滑曲面，因而扭率和扭矩在正交方向上必然不同。即使如此，往往发现，对于设计目的来说，稀疏网格已足够了。

梁格的另一个缺点，就是任一梁内的弯矩是严格与其曲率成比例，而在原型板中，在任一方向上的弯矩，都与该方向和正交方向上的曲率有关，如式3.5所示。幸好，从经验得知梁格法和较精确的方法进行比较，发现从梁格推导出的分布弯矩所算得的弯应力对于大多数设计要求来说，是足够精确的。在荷载集中于一个远比梁格网格小的面积的附近处，梁格不可能给出大的局部弯矩和扭矩，因而需要使用第3.8节中所描述的影响图表来分析。

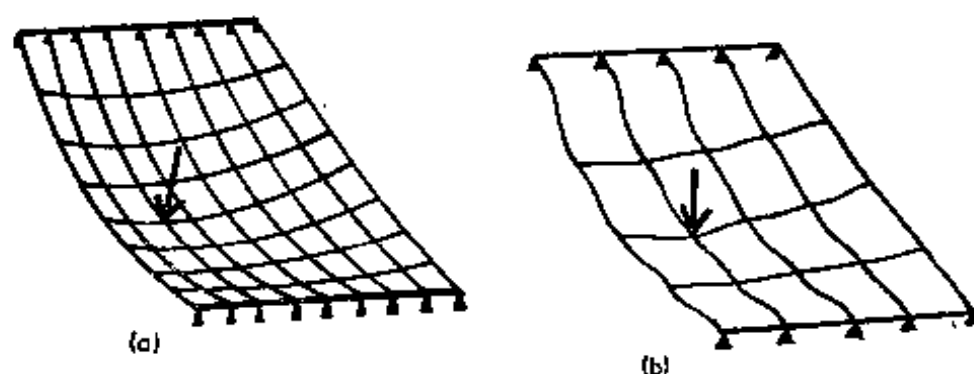


图3.9 (a)细密的梁格网格；(b)稀疏的梁格网格

### 3.5.1 梁格网格

由于上部结构形状和支点布置多样化，对于选择梁格网格来说，难以得到正确而一般的规律。然而，某些上部结构和荷载的提纲挈领的特性应该牢记，其它的建议和例题则参见文献〔7和8〕。

(1)从设计者需要结构怎样工作来考虑，使梁格重合于

设计受力线（也就是说平行于预应力或梁构件，沿着边梁及支座上的受力线等等）。

（2）从原型内的力怎样分布来考虑，以图3.10所示横截面的扭转剪力流为例，在板边缘处的垂直剪力流所形成的垂直剪力分量  $S_x$  由边缘的梁格承受。将原型与梁格二者尽可能精确的做成等效，每根边缘梁格必须接近于上部结构边缘处垂直剪力流的合力，对于实体板边距约为0.3的高度。

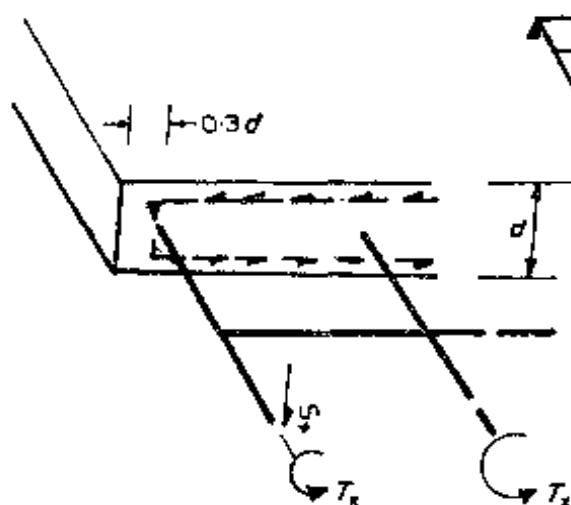


图3.10 梁格边缘的扭转力

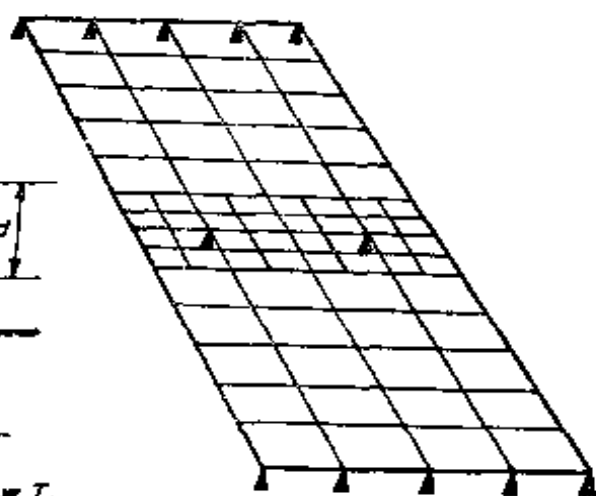


图3.11 有内支点时在突变区加细梁格的网格

（3）纵向构件的总数可以从1（若板很窄可视为一根梁那样工作的）到大约为20之间的任何数目（若上部结构很宽，由设计说明是否经济和困难而定）。设置构件时，其间隔要小一些，接近于2~3倍板高，因为板内荷载的局部传播就不考虑了。反之，如果要输出数据表示出局部的最大数值，则对于各向同性板纵向杆件的最大间距不得超过  $\frac{1}{4}$  有效跨径，对于正交异性板，在第十章的图表中，可以选用的间距为集中荷载作用时杆件所承受者不超过荷载的40%。



(4) 横向构件的间距必须足够小到这样程度, 以致沿纵向构件的荷载分布用许多集中荷载来代表能达到合理的精确度, 也就是间距约小于  $1/4$  有效跨径。在突变区内, 例如, 在内支点附近, 则需要更小的间隔, 如图 3.11 所示。

(5) 横向和纵向构件的间距必须适当接近相同, 使荷载静力分布较为灵敏。

(6) 在斜交角度小于  $20^\circ$  的简支上部结构, 通常可以用具有直交的梁格来分析。然而对于较大的斜交角度, 或者上部结构是连续的, 梁格支点线必须在原型斜交支点约  $5^\circ$  范围以内。

(7) 一般来说, 横向梁对纵向构件应该成直角 (即使是斜交桥), 除非如在第九章所讨论的, 它的受力的方向例如钢筋是斜交的。

(8) 若上部结构斜度很大, 或支座互相靠近, 支座的压缩性在局部剪力上有相当的影响, 则应充分注意。

(9) 在梁格分析中, 无疑地假设集中荷载代表分布于由构件所代表的整个宽度上的荷载。有时, 对具有单独点支承的上部结构最好用的两种独立梁格来研究。首先, 用整个上部结构的稀疏的网格来研究跨间的弯矩分布。然后, 再用细密的网格仅代表支点周围的小范围。作用于这个较小范围的梁格边界上的力和位移是沿用稀疏的网格内同一点的力和位移的输出值。

### 3.5.2 梁格构件截面特性

#### 惯性矩

纵向和横向的梁格构件的惯性矩, 系考虑每根构件代表至相邻平行构件间对中划分的桥面板的宽度来计算, 如图 3.12 所示。应按板的中性轴计算惯性矩, 于是对于各向同性板, 则有

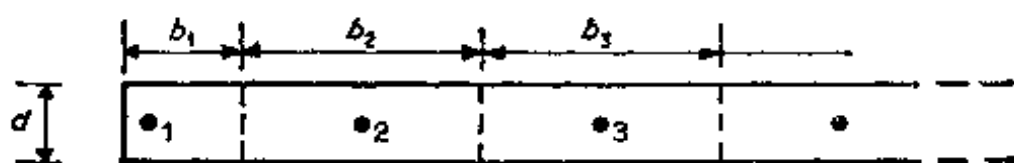


图3.12 板式上部结构对于纵向梁格杆件的划分

$$I = \frac{bd^3}{12} \quad (3.14)$$

若上部结构具有薄的悬臂或薄的中间板条，则纵向构件可以布置如图3.13a 或 b 所示。在图 3.13a 中所有构件的惯性矩是根据板的中性轴计算求得的。然而，若梁格构件布置如图3.13b 时，则在构件1.5和9 上面的薄板本来是分别作为构件2，4，6 和8 的翼缘的。因此，1，5 和9 的惯性矩按绕薄板的形心计算，而杆件2，4，6 和8 则如图3.13a 按带翼缘计算后减去1，5 和9 那些小惯性矩。横向上，薄板绕其本身的形心弯曲，因而在式(3.14)中对于杆件1—2，4—5，5—6，8—9 采用薄板的高度，而在杆件2—3，3—4，6—7 和7—8 中采用厚板的高度。

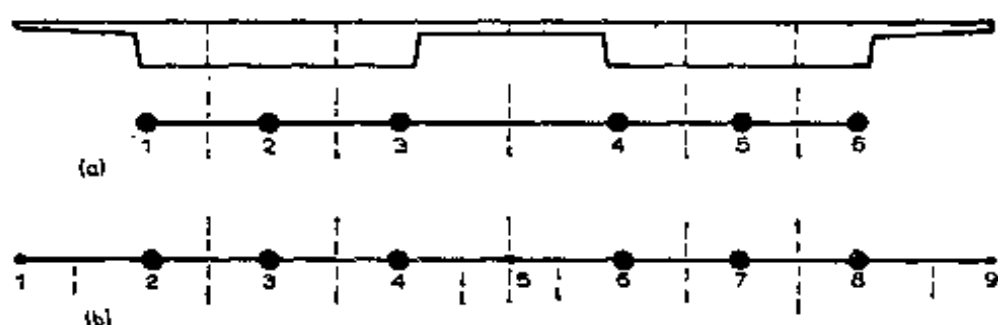


图3.13 具有薄悬臂和薄连接板的纵向梁格构件的两种布置

图3.14所示空心板式上部结构纵向梁格构件的惯性矩，由阴影截面按绕中性轴计算。横向上惯性矩一般按绕空心的中线计算。然而，对于空心高度小于总高度的60%者，则横向惯量通常可以假定它等于每单位宽度的纵向惯量，两种计

算都不够精确，但两者都能满足设计目的。

如果把板的弯矩曲率方程式 3.5 与梁的方程式 2.3 作比较，可以看出板的方程式不仅由于横向曲率效应而异，并且还因为有效刚度为梁的  $1/(1-\nu^2)$  倍。在整个等效梁格分析中，这种板的刚度增大的因素通常是略而不计的。因为纵向和横向两者的刚度受到相同的增值的影响不改变荷载的分布。



图3.14 空心板式上部结构纵向梁格构件的布置

钢筋混凝土和预应力钢筋混凝土板桥，往往在纵向和横向上具有相同的刚度，这是由于假定全部不开裂的混凝土截面是有效而略去钢筋不计的结果，这是足够精确的。然而，若横向配筋少而在桥梁纵向是预应力或配筋多时，这就要考虑到受弯开裂，在两个方向的惯量各自按不同的换算截面加以计算。

### 扭转

在第 3.3.2 节中，表达了一块板每单位宽度的抗扭常数为：

$$c = \frac{d^3}{6} \text{ 每单位宽度}$$

因而，对于代表板宽  $b$  的梁格，则为

$$C = \frac{bd^3}{6} \quad (3.15)$$

这是式 3.14 所给出的惯性矩值的两倍，故对于代表板的梁格可以假定  $C = 2I$ ，对于空心板计算  $C$  值却没有简单精确

的规律，上述的  $C = 2I$  是方便，而且精确的对任何情况均可适用。

在真正的正交异性板中，从式 3.4 可知：横向与纵向的扭矩是相等的，并且同时两个扭率恒等于  $\partial^2 w / \partial x \partial y$ 。因此，横向和纵向梁格有着每单位板宽相等的抗扭常数。按照式 3.9 所示胡勃（Huber）的近似公式则横向和纵向梁格的抗扭常数为

$$c = 2\sqrt{i_x i_y} \quad (3.16)$$

式中：  $c$  = 每单位板宽的抗扭常数；

$i_x$  = 每单位板宽的纵向构件惯性矩；

$i_y$  = 每单位板宽的横向构件惯性矩。

在梁板式构造和“正交异性”的纵横加劲式钢桥面板构造中，扭矩在正交方向不是相同的，所以式 3.16 不适用（见第四章和〔2〕），并且抗扭常数也不同。

在板边，接近顶面和底面（图 3.10）的水平剪力流，在距离板的边缘（即接近于板边 0.3 高度处）改变方向。若将边缘构件的宽度减至  $(b - 0.3d)$  计算  $C$  值，则梁格和原型的等效性能将得到改善。

在第 3.3.2 节中，曾提到板内“扭矩”仅是截面上由于接近顶面和底面的相反的水平剪力流形成的扭矩，而在边缘上垂直剪力流则考虑为垂直剪力部分。用梁格模拟这种性能是非常接近的。图 3.15a、b 中分别示出图 3.5 的板以及等效的梁格。在图 3.15b 中横截面上的力与图 3.15a 中等效，梁格的扭矩  $T_x$  等于板内由于相反的水平剪力流形成的扭矩，而剪力  $S_T$  等于板内垂直剪力。在梁格边缘构件内（以及板边缘内），由于扭矩产生剪力  $S_T$  的理由已表明于图 3.15c 中。梁格的扭转引起纵向和横向构件两者的扭转和扭矩。在横向构件与边缘纵向构件交会的节点上，横向扭矩在纵向构

件内反应为弯矩和剪力  $S_T$ 。在内节点处，大多数的横向扭矩是跨节点的。而稍有不同的是作用在两侧的横向扭矩在纵向上反应为弯矩和剪力。

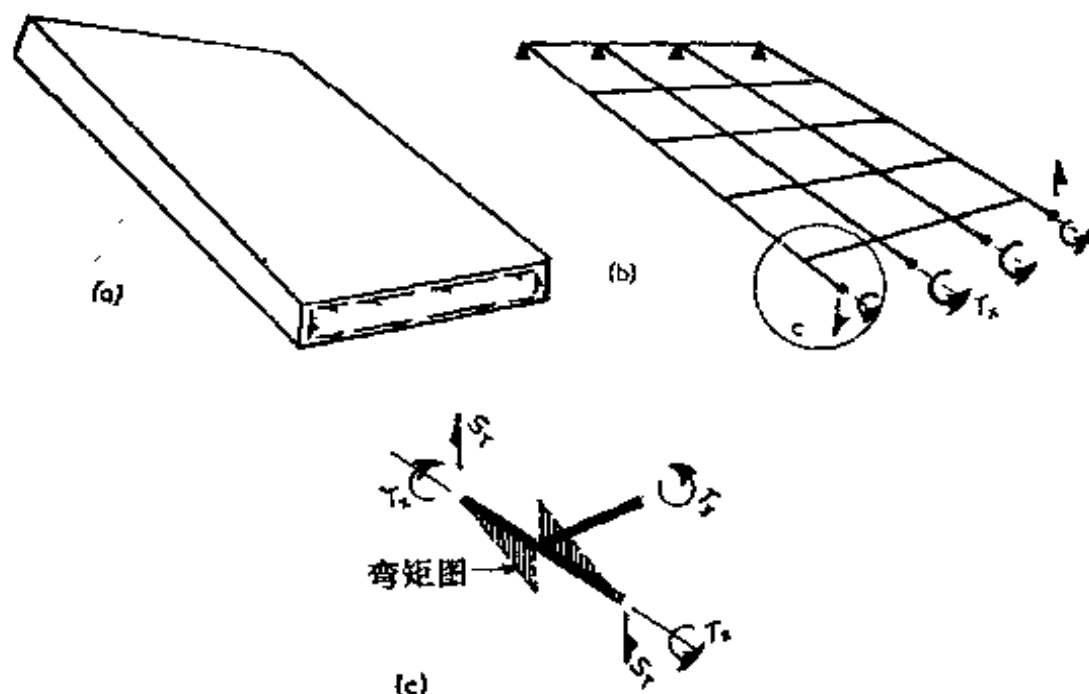


图3.15 (a)板的扭转；(b)等效梁格的扭转；(c)部分梁格的力的扭转

对于梁状的桥梁，若梁格仅设计成为一根纵向构件和各种悬臂的横向构件，则上述规律就不存在。因为纵向构件必须承受由于相反的水平剪力流及相反的垂直边缘剪力两者在横截面上形成的扭矩，抗扭常数必须按第2节所述作为一根梁来计算。

## 3.6 梁格实例

### 3.6.1 实体板

图3.16示出一单跨实体造价不高的钢筋混凝土板上部结构以及一简便的梁格网格。因为梁格小，这里值得使用以横向和纵向构件间隔等于约  $2\frac{1}{2}$  倍高度的相当细密的网格，边

缘纵向构件设在距原型边缘为 0.3 高度处，该处是接近由于扭转在原型内所产生的垂直剪力的位置。

由于在两个方向上配筋按同一等级排列，故可假定刚度相等，因此板是各向同性的。计算全部混凝土面积（即不考虑开裂）的惯性，则得：

$$i_x = i_y = \frac{1.0^3}{12} = 0.0834 \quad \text{杆件内每单位板宽}$$

$$c_x = c_y = \frac{1.0^3}{6} = 0.167 \quad \text{杆件内每单位板宽}$$

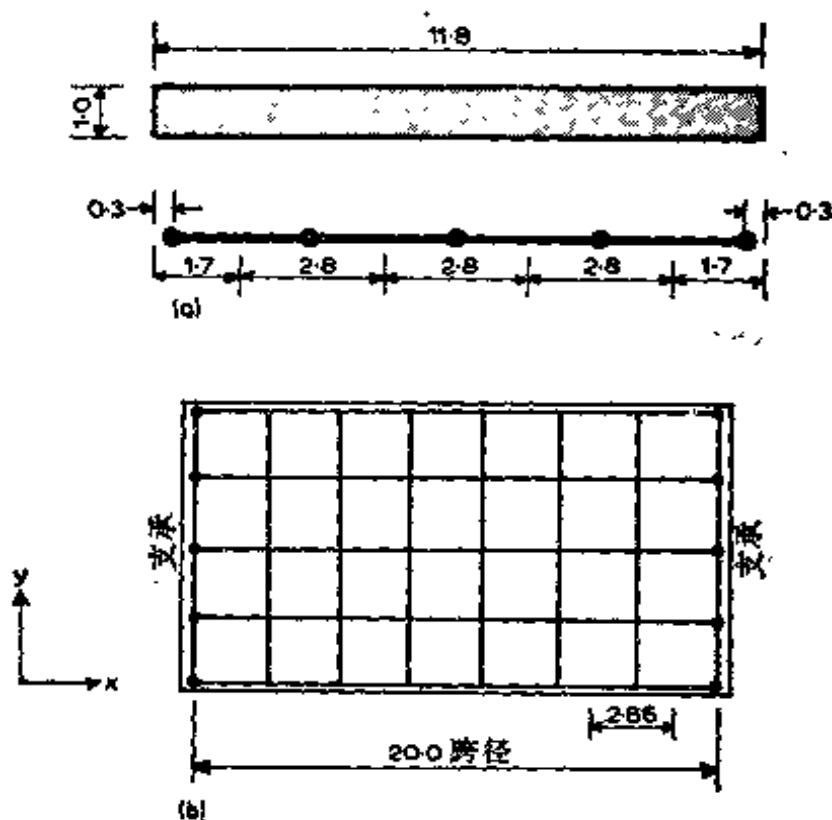


图3.16 实体板式梁格上部结构  
(a)截面；(b)平面

对于宽度为2.8米的内纵向构件，则得：

$$I_x = 2.8 \times 0.0834 = 0.233 \quad C_x = 2.8 \times 0.167 = 0.466$$

对于边缘纵向构件宽度取 1.7 米来计算  $I$  值，而取 (1.7 -

0.3) = 1.4米(即承受水平扭转剪力流的宽度)来计算  $C$  值。  
因而

$$I_x = 1.7 \times 0.0834 = 0.142 \quad C_x = 1.4 \times 0.167 = 0.233$$

横向惯性矩系按同样方法计算。

### 3.6.2 具有边缘加劲梁的组合式实体板

图3.17为具有填充钢筋混凝土的预浇预应力混凝土梁组合建造的单跨板式上部结构。梁跨与桥台直交而边缘成大斜交,边缘系由一根用护墙构成的加劲梁所支承。

梁格网格已作选择使得纵向构件平行于预应力梁而与横向构件成直角。每一纵向构件代表三根预应力梁,而横向构件间距为  $1/4$  跨径。边缘构件与上伸式边加劲梁在同一中心线上。

填充混凝土的强度和刚度低于预应力混凝土,因而与预应力混凝土比较,其模量比  $m = 0.8$ 。在两个方向上分别使用不同的换算开裂截面惯性矩,因为横向钢筋是少量的。而且,这些钢筋在顶部和底部具有不同的面积,因而横向换算的截面对于下弯和上拱情形各具有不同的惯性矩,采用两者的平均值。结果对于钢筋用  $m = 7$  (短期荷载)。

$$i_x^* = 0.0070 \quad \text{杆件内每单位板宽}$$

$$i_y = 0.00035 \quad \text{杆件内每单位板宽}$$

应用式3.16,

$$c_x = c_y = 2\sqrt{i_x i_y} = 0.0031 \quad \text{杆件内每单位板宽}$$

边加劲梁的截面特性由图3.17中交叉线所示面积计算出来(假定组合板的效应计入内正交梁格构件内)。由于加劲梁的作用象梁一样,抗扭常数按第2.4节计算。要注意边梁的惯性矩没有象第8.3节所述的状态增大,这是因为组合板的横向刚度对上伸式梁不足以起着有效翼缘的作用。

### 3.6.3 两跨空心板

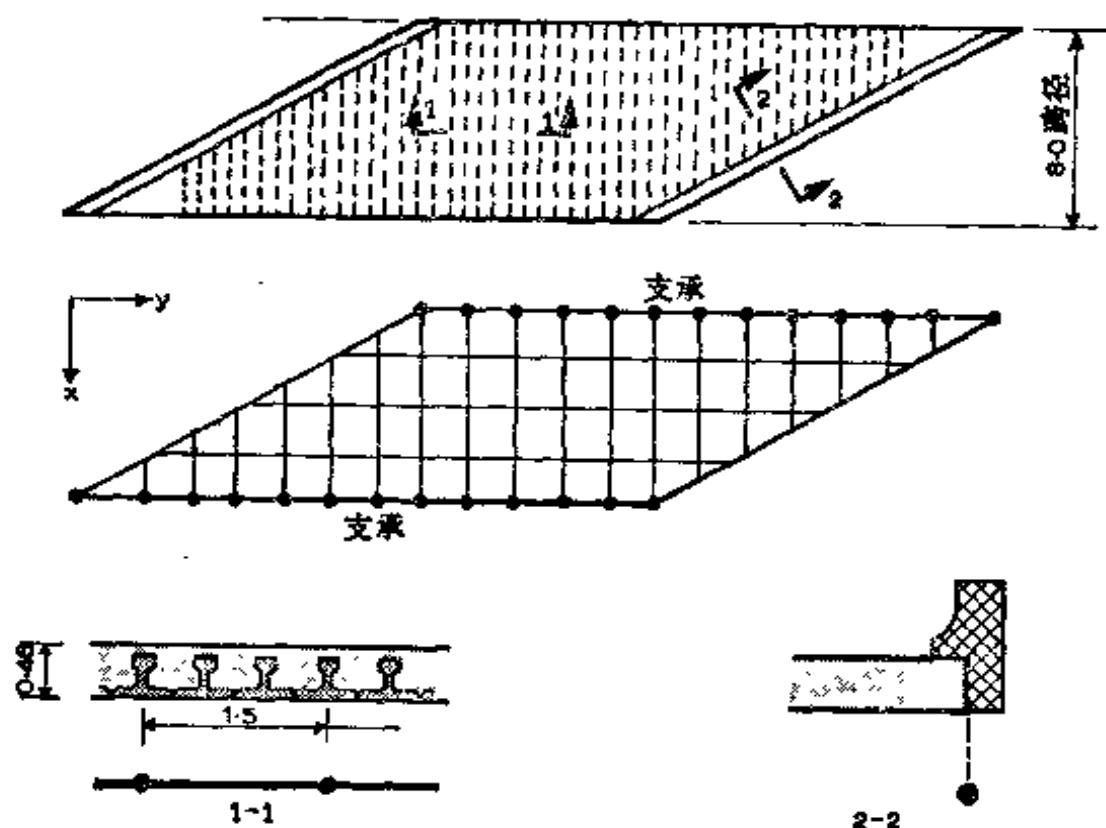


图3.17 斜交组合板式梁格上部结构

图3.18表示一具有边悬臂板为支承人行道的两跨空心板式上部结构。梁格有四根纵向构件。两根边构件与边腹板在同一中线上，该腹板的扭转垂直剪力流作用比较集中。内纵向构件则通过支座。横向构件一般与纵向构件正交，并且中距约为有效跨度的1/5。接近内支点处，它们靠得较近，使可能对突变作分析。另外在支座之间设置一斜交构件以代表横隔板钢筋形状的强度集中。

对于图3.16中的阴影部分所示截面，计算其纵向惯性矩，得：

$$i_x = \frac{1.0^3}{12} - \frac{\pi \times 0.6^4}{64} = 0.077 \quad \text{杆件内每单位板宽}$$

假定上部结构是各向同性的，则

$$i_y = i_x$$



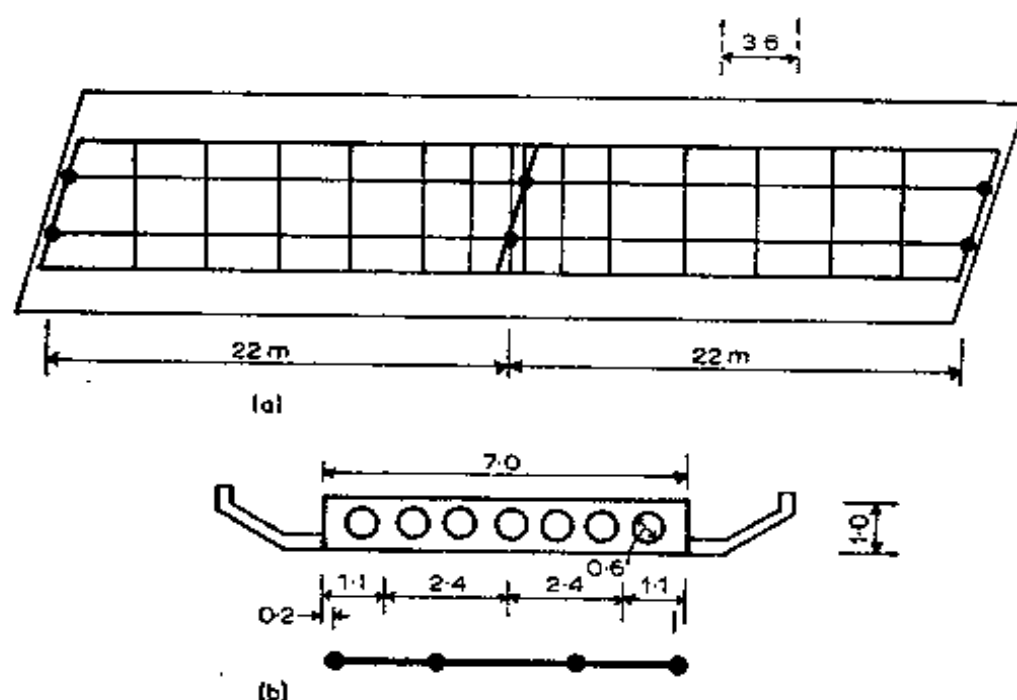


图3.18 连续空心板式梁格上部结构  
(a)平面; (b)截面

$$c_x = c_y = 2i_x = 0.154 \quad \text{杆件内每单位板宽}$$

因而, 对于内纵向构件, 则可求出

$$I_x = 2.4 \times 0.077 = 0.185 \quad C_x = 2.4 \times 0.154 = 0.37$$

而对于边构件, 则

$$I_x = 1.1 \times 0.077 = 0.085 \quad C_x = 0.9 \times 0.154 = 0.14$$

将看出抗扭常数仅按边缘垂直剪力 (此处与边缘构件相重合) “内侧” 的宽度计算。对于接近跨中的正交横向边缘构件

$$I_y = 3.6 \times 0.077 = 0.277 \quad C_y = 3.6 \times 0.154 = 0.55$$

斜交横隔板截面特性的计算是不精确的, 建议必须根据横隔板内钢筋数量定出, 因其数量超过板中别处所布置的。

## 3.7 输出数据整理

### 3.7.1 弯矩和剪力

图3.19示出靠近边缘处三根纵向梁格弯矩图的典型形

状。对于内构件的图形通常是合理地连续的而设计弯矩可以立即从梁格输出读出。因为如图3.15所表示的有扭转效应，边构件图形是典型“锯齿”形的不连续形状。图3.19的锯齿图形，可以设想为虚线所示的由弯曲引起的连续弯矩图形上作用有扭矩形成一锯齿状弯矩图的叠加形式，所以必须在节点的每一侧的梁格输出弯矩取平均值来作为一个答数。

对于每一梁格构件剪力的输出是锯齿弯矩图输出值的斜率，它计入由于实际弯曲  $S_M$  和扭转  $S_T$  产生的两部分分量，如图3.19中所示。由于两个分量一起作用在原型板内，所以它必须设计成能承受全部梁格输出的弯曲和扭转剪力。

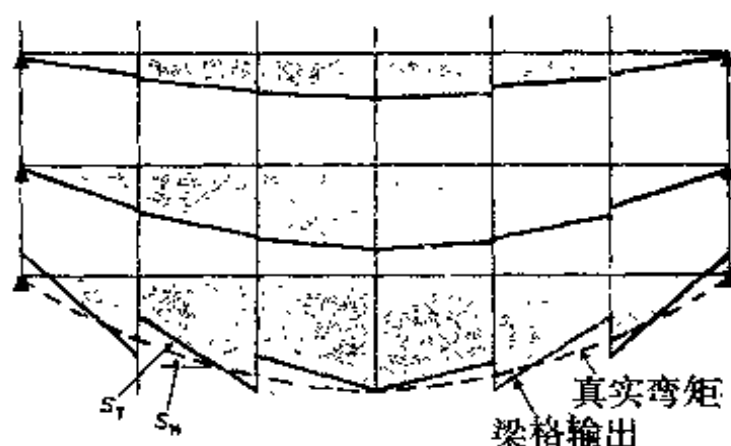


图3.19 部分梁格输出弯矩图

在实际的正交异性板内，扭矩在正交方向上是相同的，然而，往往从梁格输出读数中是有差别的，因此对于每单位板宽的局部横向和纵向构件在任一点处的设计扭矩必须取其输出数据平均值。

### 3.8 在集中荷载作用下的弯矩

集中荷载作用的有效面积，可以假定按通过板表面与垂直线成  $45^\circ$  向下分布至板的中性轴平面上来计算，如图 3.20

所示。若这作用的面积等于或大于梁格网格（或若由于几个荷载重叠一起的面积大于梁格网格），则可以假定把荷载充分传播到梁格上，以模拟整块板上的弯矩分

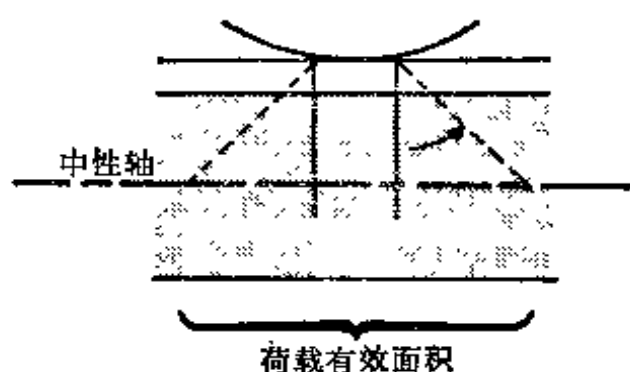


图3.20 集中荷载传播到中和轴平面上

布，而无须对弯矩作进一步修改。另一方面，若荷载作用的面积比梁格网格为小，即使分布有弯矩场的梁格是模拟上部结构的，对于荷载之下的局部最大数值将得不出来。至于在梁格网格以内的板面积上由于大的局部弯曲引起的附加弯矩，可从泼吉尔 (Pucher) [5] 的影响图表求得。

#### 参考文献

1. Troitsky, M.S. (1967) Orthotropic Bridge, Theory and Design, The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, Ohio.
2. American Institute of Steel Construction (1963), Design Manual for Orthotropic Steel Plate Deck Bridge, AISC, New York.
3. Rowe, R.E. (1962), Concrete Bridge Design, C.R. Books, London.
4. Jaeger, L.G. (1964), Elementary of Elastic Plates, Pergamon Press, Oxford.
5. Pucher, A. (1964), Influence Surfaces of Elastic Plates, Springer Verlag, Wien and New York.
6. Lightfoot, E. and Sawko, F. (1959), "Structural frame analysis by electronic computer, grid frame

works resolved by generalised slope deflection,"  
Engineering, 187, 18-20.

7. West, R. (1973), C & CA/CIRIA Recommendations on the use of Grillage Analysis for slab and Pseudo-slab Bridge Decks, Cement and Concrete Association, London.
8. West, R. (1973), "The use of grillage analogy for the analysis of slab and pseudo-slab bridge decks, Research report 21, Cement and Concrete Association, London.

## 第四章 梁板式上部结构：梁格分析

### 4.1 引言

近代的中小跨径桥梁，大部分是梁板式上部结构。为了设计的目的，本章叙述如何把这种结构考虑为两维结构来分析，其方法在若干方面的性能要比板简单。使用计算机，借助与原型等效或模型的梁格分析，已引起工程师们的注意，现对若干结构类型举例说明之。至于那些非普遍实用的情况，有时需要从真正三维形式分析这种桥梁结构的附加特性，这些将在本章末谈及，而将在第七章进一步研究。

### 4.2 结构类型

大多数梁板式上部结构，在桥台之间置有多根纵梁，而横向上用一薄板横盖其顶面，如图 4.1 所示。对于小跨径，纵梁通常是密排的，如图 4.1a 所示，但对于较大跨径，其设置如图 4.1b 和 c，并在支点上设置称之为“横隔板”的横梁，以连接纵向梁，有时也在沿跨径各处设置如图 4.1d 所示形式。桥面可以有较大的斜交角，纵梁距离可以彼此不一致，也可布置为加宽式，弯桥通常用板的边宽来调节成合适的弯度，但支承在每跨为直线的梁上。有时也把纵梁做成曲线的，如第九章所述。

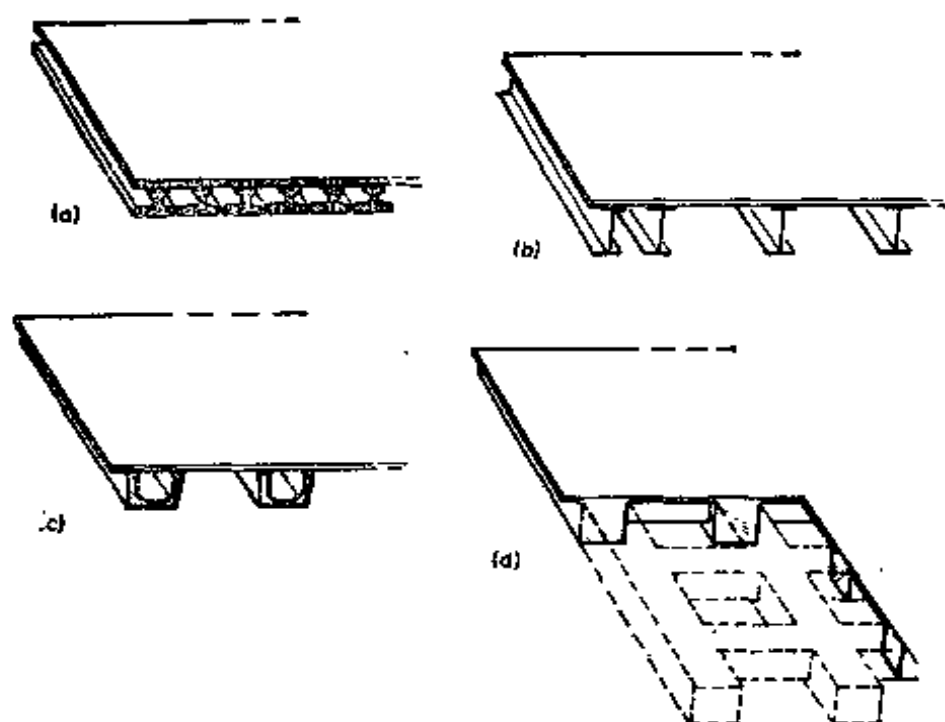


图4.1 梁板式上部结构  
(a)密排式；(b)稀排式工字梁；(c)稀排式箱形梁；(d)格梁

### 4.3 结 构 作 用

如图 4.2 中所示，跨中没有横隔梁的上部结构的情况，可以考虑纵向为梁而横向为板的简化组合体系。对于纵向弯曲，板作为梁的上翼缘，而上部结构可以考虑（而且有时制成 T 形）为许多沿翼缘边连接起来的 T 梁，因为板仅具有梁的一部分弯曲刚度，它以横向曲率大于纵向而弯曲，可视为横跨于纵梁间有许多横向的板条的性能。只有在直接承受集中荷载附近的板内纵向弯矩和扭矩在数值上与横向弯矩才有较大的差值。如第 4.6 节所述，一般可以把由于集中荷载的两维分布引起的局部弯矩与梁相对挠度和转角对板内产生的横向弯矩相叠加。

图 4.3 表示一上部结构单元，它支承着局部荷载微量

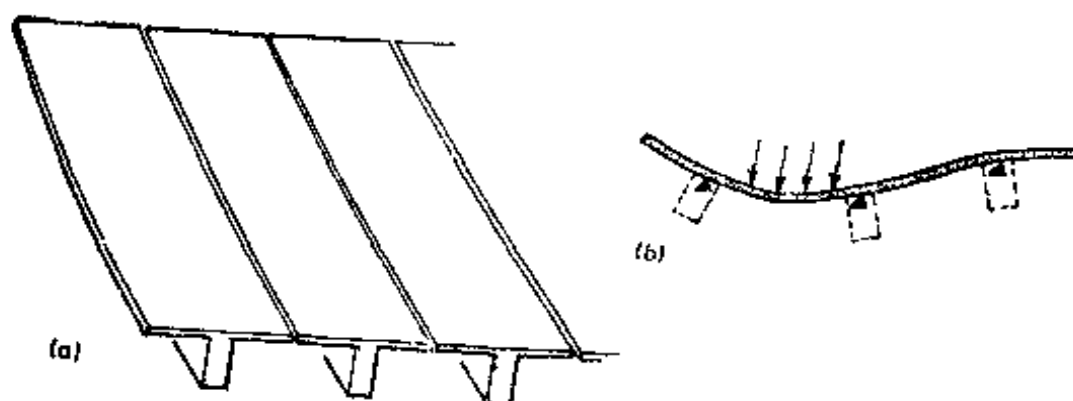


图4.2 梁板式上部结构的板的作用  
(a)作为T梁翼缘的纵向弯曲；(b)作为连续梁的横向弯曲

$dW$ ，梁传递弯矩  $M_x$ 、剪力  $S_x$  和扭矩  $T_x$ ，而板只是有效地传递横向弯矩  $m_y$  和剪力  $S_y$ （每单位板宽）。由下列方程式给出了这些力之间关系：

$$\begin{aligned} -\frac{dS_x}{dx} + \Delta S_y &= -W \Delta y \\ -\frac{dM_x}{dx} &= S_x \end{aligned} \quad (4.1)$$

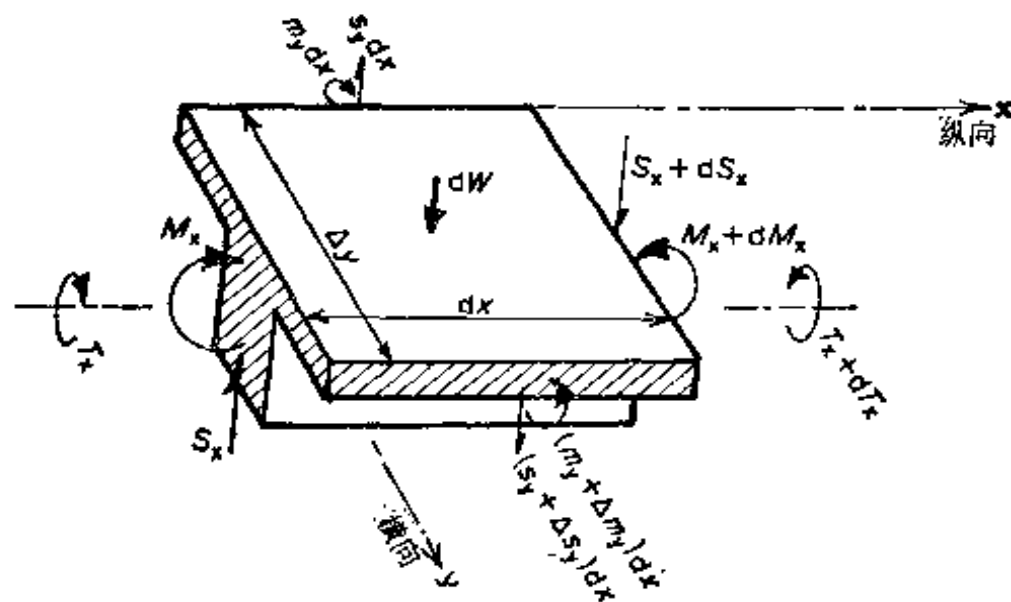


图4.3 梁板式上部结构单元

$$\Delta m_y + \frac{dT_x}{dx} = S_y \Delta y$$

由于扭转在薄板内是比较小的，所以板内扭矩略去不计，另外，假如纵梁为十分单薄的工字型截面，它的抗扭刚度也十分小，则  $T_x$  实际上等于零，因而板就像在每根纵梁处支承在弹性支点上的连续梁一样。反之，假如梁有大的抗扭刚度，则  $T_x$  不能略去，而位于梁上的板内弯矩是不连续的。

当上部结构有横梁（见图4.4）时，则力的关系为：

$$\begin{aligned} \Delta S_x + \Delta S_y &= -W \Delta x \Delta y \\ \Delta M_y + \Delta T_y &= S_x \Delta x \\ \Delta M_x + \Delta T_x &= S_y \Delta y \end{aligned} \quad (4.2)$$

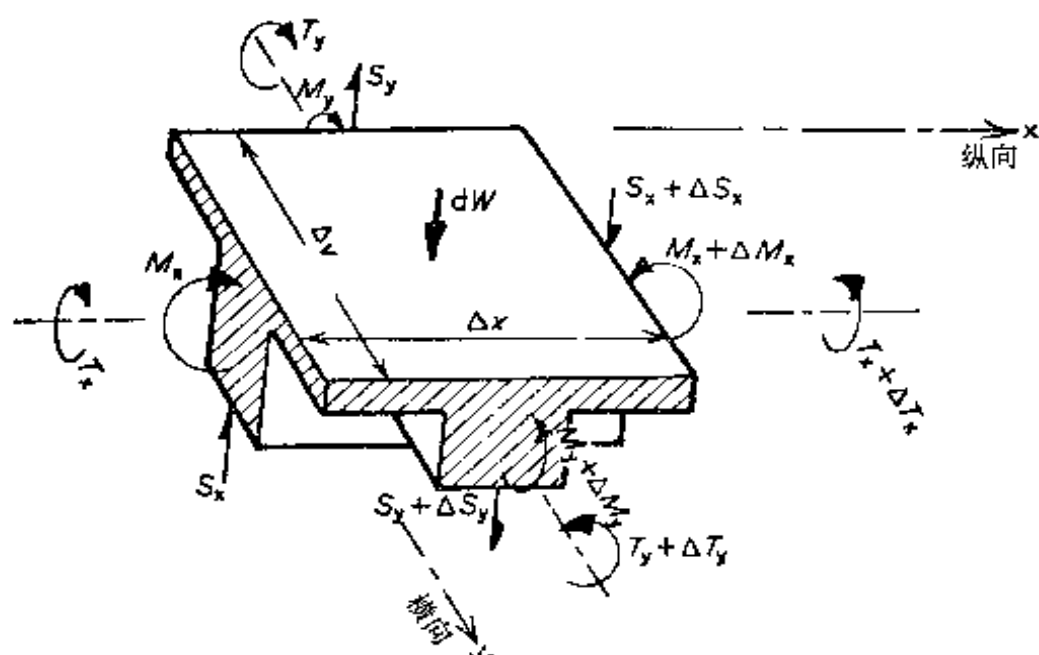


图4.4 格梁式或梁板式上部结构在横隔板处的单元

这些方程式类似那些在第3.3.1节中板的公式。然而，扭矩  $T$  在两个方向上是不等的，并且视两个方向不同的扭转和刚度而定。



一般说来,在纵横方向上结构的部分刚度可以假定为相似横截面的梁一样,而用第2.3.2和2.4.3节来计算作用应力。与板的性能有关的专门规定及作为梁翼缘的有效板宽将在另节讨论。

## 4.4 梁 格 分 析

### 4.4.1 梁格网络

对于梁板式上部结构,如同板式上部结构一样,决定适当的梁格网络最好以考虑到具体上部结构的结构性能去处理比用一些规定为好。图4.5表示四种上部结构型式适宜的网格的示例,第4.5节和参考文献[1和2]将进一步加以介绍。

在图4.5a中,上部结构实际是纵梁和横梁的梁格。因为平均的纵向和横向弯曲刚度是相差不大的。承受局部荷载时,它的分布多少相似于一受扭的柔性板。梁格可采用与原型梁中心线相重合的构件去近似的模拟原型。

在图4.5b中,上部结构的纵梁比行车道略窄,将原型梁中心线作为纵向梁格既方便,又自然合理。没有跨中横隔板的横向梁格,其间距可以任意选择,但一般约取有效跨径的 $1/4$ 到 $1/8$ 。如原型支点上有横隔板,则必须设置一根梁格与它相重合。

图4.5c是中心密排的梁式上部结构。由于用梁格纵向构件与所有的纵梁相重合是十分费事,又不易处理,因此,适宜的方法是用一根梁格去代替一根以上的纵梁。然而,如同梁板式上部结构一样,其分布性能不佳,因而布置梁格间距不要超过 $1/10$ 跨径,这是十分重要的,否则,在梁格分析中,弯矩集中将不明显。可参见第10.5.2节所建议的间距。

图4.5d所示的上部结构具有纵向大梁,它的宽度构成

很大的中心距离。在横向弯曲过程中，薄板弯曲比厚梁为大，梁格必然随着整个薄板的宽度上的弯曲，所以横向构件要由串连的构件构成，它的不同刚度代表在原型中的不同刚度（另一个方法是如第6.3节所述的用剪力柔度办法。因而，在纵向梁中心线之间用一根单独横向构件，使它能够代表原型的由厚至薄至厚的原型板。然而，梁格输出的程序却是相当麻烦的）。这种上部结构也可以作为每根纵梁用两根梁格的板式上部结构来处理，如图3.13所示；但必须作为一块板来计算抗扭参数。

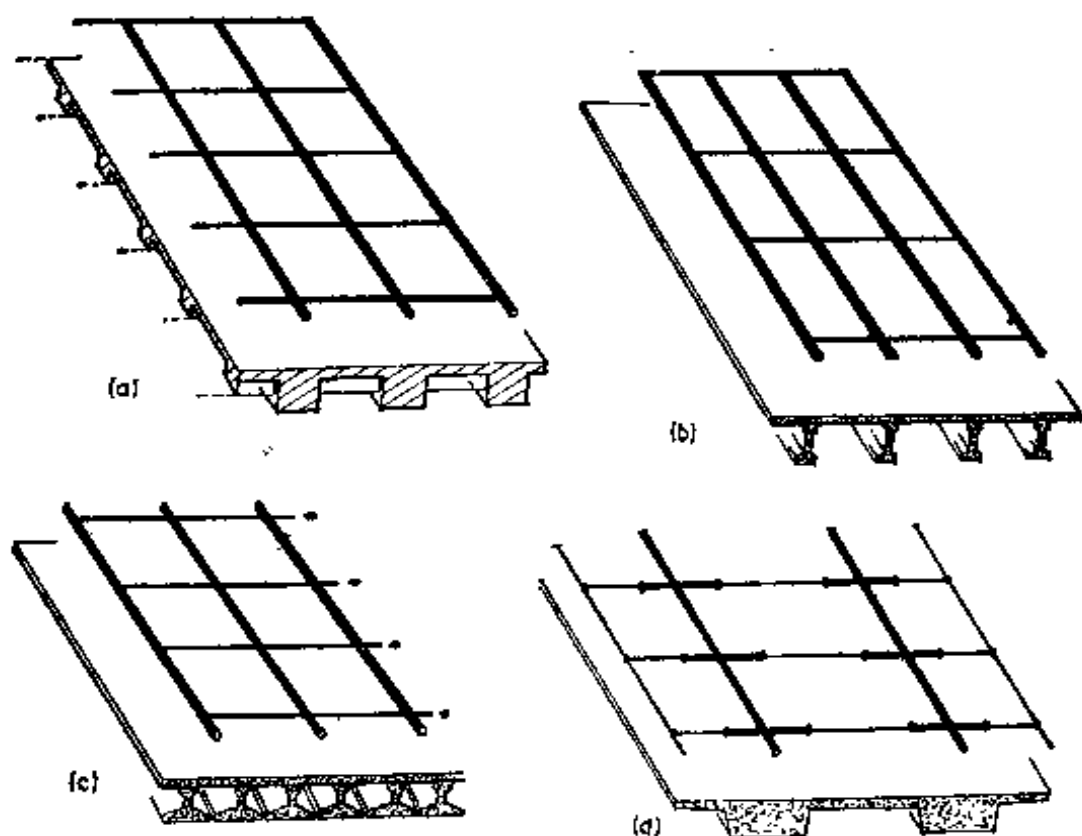


图4.5 梁格的网格

#### 4.4.2 纵向梁格构件截面特性

图4.6表示三种梁板式上部结构的部分横截面，以及由适当的梁格构件所代表的每一种上部结构的图形。

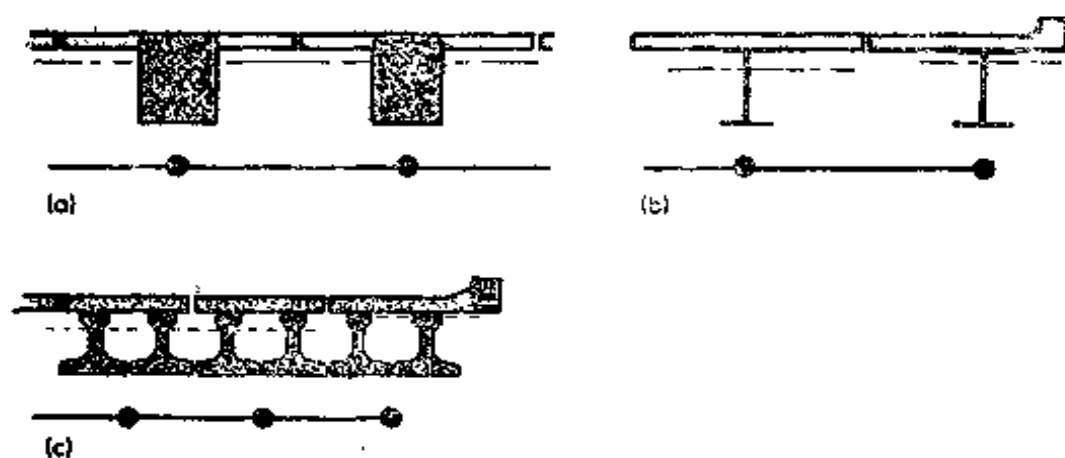


图4.6 由纵向梁格所代表的截面

每一梁格惯性矩按截面的形心计算。通常，内构件和边构件截面形心是处于不同的水平线上。除非在如第七章所述的三维分析所采用者外，这种差距通常略而不计。

若上部结构的梁的间距远大于有效跨径的  $1/6$ ，或若边缘悬臂超过有效跨径的  $1/12$ ，剪力滞后使梁的翼缘的有效板宽明显地减小。因而如同第八章所叙述，梁格惯性矩必须用折减的板宽来计算。

有时，为了改进第 4.6 节所述作用荷载的模拟效果，在图 4.6 中所表示的结构截面之间设置纵向虚拟刚度的梁格构件是合适的。这些构件的截面特性计算和第 3.5.2 节图 3.13 中的上部结构相同。

图 4.6 所示各种上部结构承受扭转时，则“梁”部分（图 4.6 中阴影部分）如同梁单独承受纵向扭转一样，而“板”部分则如同板在两个方向上承受扭转一样。因此，梁格的抗扭常数  $C$  为第 2.4.3 节所计算的梁的抗扭常数的总和，而板的抗扭常数则按式 3.15 计算。

#### 4.4.3 横向梁格构件截面特性

横向梁格构件可以用一块板表示，其截面特性计算如下：

$$I = \frac{bd^3}{12}$$

$$C = \frac{bd^3}{6}$$
(4.3)

当梁格有横隔板时，必须把板作为翼缘进行计算。若横隔板的中心线不远，则翼缘可以假定延伸到两横隔板间的中点。若翼缘宽度超过横向弯矩零点之间的有效横向跨度的  $1/12$  时，如第八章所述，剪力滞后就减少了有效的翼缘宽度。如事先不知道横向弯矩时，为安全起见通常假定有效翼缘为纵向构件间距的  $0.3$ （也就是说在剪力滞后计算中的宽度是纵向构件间距的  $2$  倍<sup>①</sup>）。

若建筑材料在纵向和横向上有不同的特性，则必须谨慎估算它们的相对刚度。例如在预应力混凝土和钢梁上的钢筋混凝土板对于纵向下挠形成的弯矩在受压状态是完全有效的，但对于横向弯曲却按开裂后的换算截面工作。此外，若上部结构在支点上连续的，则在支点上由于纵向弯曲使同一块板在所有受拉的高度上可能开裂，因此，只有配置钢筋才有效。虽然应该尽力表达出这些不同的特性，但是由于建筑材料有着不可预估的非弹性性能，要对刚度作出正确的估算是大不可能的。有关开裂的钢筋混凝土抗扭刚度的资料见参考文献[3]。

## 4.5 梁格实例

### 4.5.1 密排梁格式上部结构

图 4.7 为就地浇筑钢筋混凝土板的密排的预应力预制混

① 整个构件的翼缘全宽似应为纵向构件间距的  $0.6$  倍（即  $2 \times 0.3 = 0.6$ ）  
——译者。

凝土梁构成的单跨斜交式上部结构。梁格模型以一根纵梁代替每两根原型梁，为了详细分析，选择横向构件的位置使其交点也作为纵梁的支承梁交于同一点上。梁格斜置，但跨径正交，与原型稍有差别而构成规则的网格（这种权宜办法大大地减少了计算上人为误差的可能性，而且能够改善分析的精确度）。

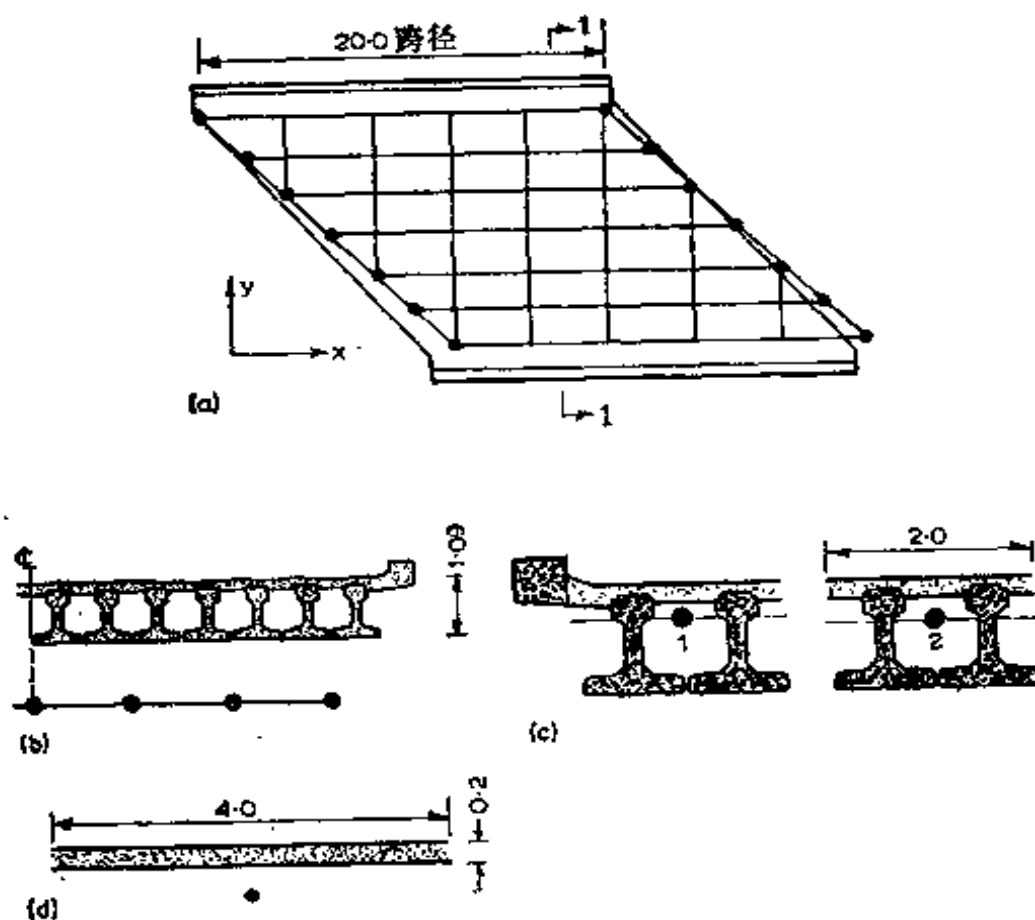


图4.7 斜交密排的梁板式上部结构的梁格  
 (a)平面图；(b)截面1-1部分；(c)纵向构件；(d)横向构件

对于图 4.7c 中的截面，假定纵梁的全部混凝土面积有效，但是，对于就地灌注的混凝土板，采用就地浇筑的板和预制预应力混凝土的杨氏 (Young) 模量换算比  $m = 0.85$  来计算。

$$I_{x1} = 0.24 \quad I_{x2} = 0.174$$

对于每根构件分“梁”和“板”两部分计算抗扭常数而后相加

$$C_{x1} = 2 \times 0.004 + \frac{2.0 \times 0.2^3 \times 0.85}{6} + 0.006$$

$$= 0.016$$

$$C_{x2} = 2 \times 0.004 + \frac{2.0 \times 0.2^3}{6} \times 0.85 = 0.010$$

这种板横向配筋百分率通常是十分高的，按照开裂后的换算截面来计算惯性矩和按略去钢筋的未开裂截面计算惯性矩无多大差别。由于初期钢筋的面积是未知的，可用  $m = 0.85$  按不开裂截面来计算惯性矩，因而横向梁格构件则有

$$I_y = \frac{4.0 \times 0.2^3}{12} \times 0.85 = 0.0023$$

$$C_y = \frac{4.0 \times 0.2^3}{6} \times 0.85 = 0.0045$$

已开裂的混凝土的抗扭常数很可能由一些不可知的因素造成误差，但在此处影响甚微。

在支点横隔板内的配筋百分率是低的，因而按开裂后的换算截面并略去板作为翼缘的有效作用计算惯性矩。它的抗扭常数也是很低的，因为它没有预加应力，而且是由就地浇筑的混凝土和预制梁的腹板构成不连续的截面，在没有相应的试验证明时，则建议在计算  $I$  值时用未开裂混凝土的面积来计算  $C$  值。

#### 4.5.2 稀排工字钢梁的钢筋混凝土板

图 4.8 表示在钢梁上建造有钢筋混凝土板的组合式上部结构的一部分。纵向梁格与钢梁中心线重合，每一根梁所代表上部结构的截面示于图 4.8b 中。使用钢（短期荷载）和略去工字梁下翼缘表面受拉而开裂的混凝土的模量比  $m = 7$ ，则得

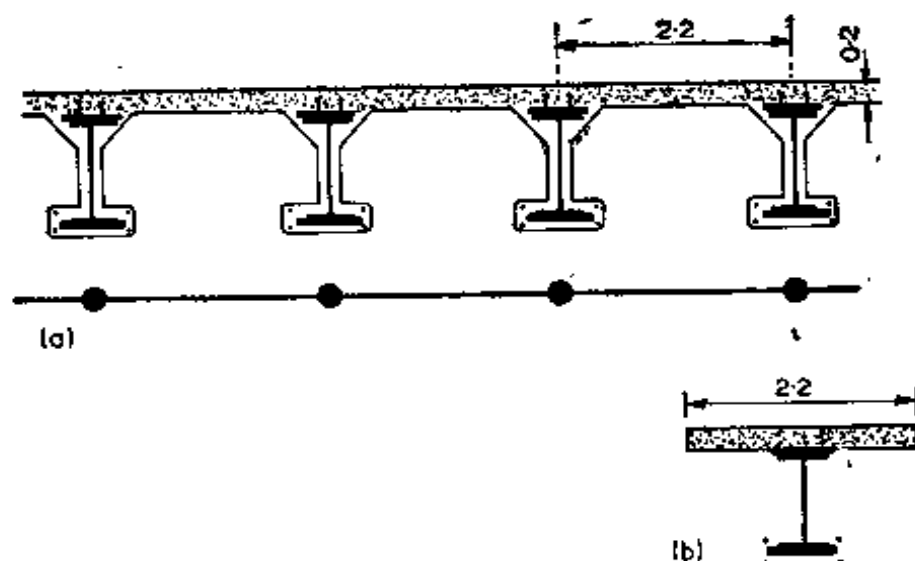


图4.8 (a)钢与混凝土组合式上部结构和梁格的横截面;  
(b)纵向梁格的截面

$$I_x = 0.21$$

$$C_x = 0.000031 \times 7 + \frac{2.2 \times 0.2^3}{6} = 0.0032$$

对于板则相似于图 4.7, 因而模向梁格特性可按同样方法计算。

#### 4.5.3 带有板的稀排箱梁式上部结构

图 4.9 示出由支承着钢筋混凝土板的稀排式预应力预制混凝土箱梁构成的梁板式上部结构横截面。纵向梁格与梁的中心线相重合。沿板条中心线增设“虚拟”的构件。

虚拟构件的截面特性取两相邻梁中间的板宽来计算  
因而

$$I_x = 1.4 \times \frac{0.25^3}{12} = 0.0018$$

$$C_x = \frac{1.4 \times 0.25^3}{6} = 0.0036$$

梁构件的特性则用包括虚拟构件作翼缘的截面来计算

(除非剪力滞后把翼缘有效宽度减小)，但应与前面所计算得的“虚拟”构件的特性相减。

$$I_x = 0.57 - 2 \times \frac{0.0018}{2} = 0.57$$

$$C_x = 0.34 - 2 \times \frac{0.0036}{2} = 0.34$$

横向构件计算和前例相同。

若梁远宽于图 4.9 中的那种梁的间距，则必须考虑到板与梁之间在横向弯曲刚度上的变化。若梁壁很厚使得格室不会扭转变形，则可以用相似于图 4.5d 的梁格。然而，若梁壁是薄的，则必须要考虑到横截面扭转变形。对于具有几个较大格室的上部结构，使用第五章所述的方法则最为简单，即对于多格式上部结构用一个纵向梁格模拟每块腹板，而用剪力柔度模拟格室的扭转变形。另一方面，若上部结构为多梁式，则可如第 6.3 节按剪力铰桥面作简化处理，但用平面刚架分析（见图 5.15）以求出等效的横向梁格特性。

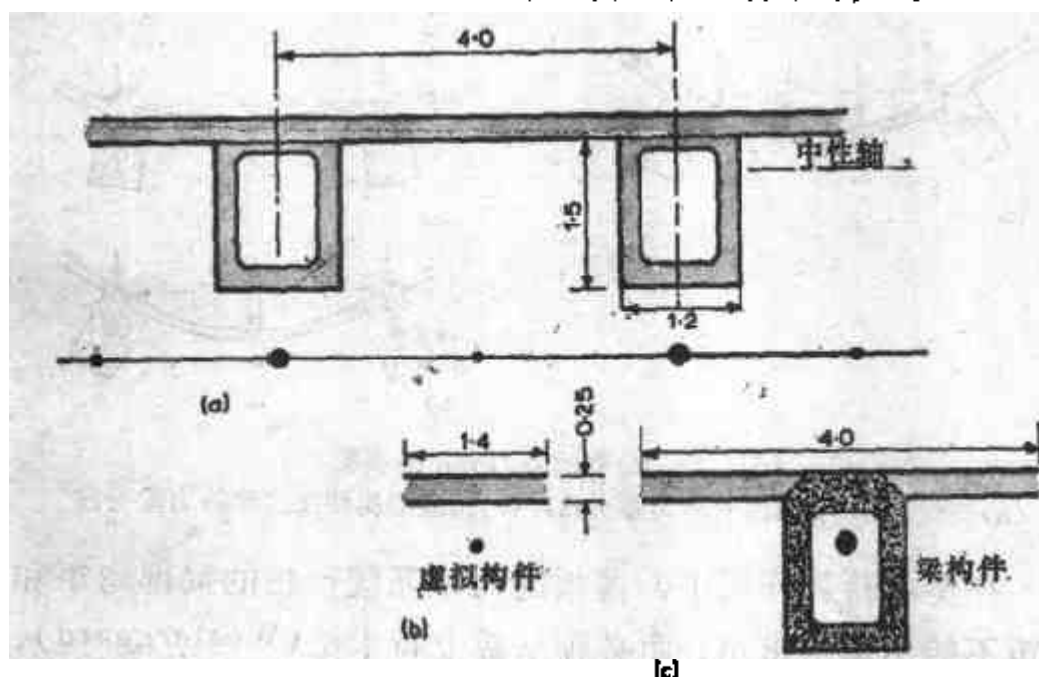


图 4.9 (a)具有稀排梁式上部结构和具有虚拟构件的梁格的横截面；  
(b)虚拟构件；(c)梁构件



## 4.6 荷载作用

如图 4.10a 中所示, 作用于梁与梁之间的荷载, 只可由节点处的力与力矩来编制梁格方程式的计算机程序。某些计算机程序表现为一个简单的局部荷载的静力分布, 如图 4.10b 所示。遗憾的是梁板式上部结构对这种荷载的横向位移十分敏感, 对于图 4.10a 和 b 的荷载情况, 整个上部结构的变形与弯矩的分布有明显不同。理想的荷载必须作用到横向构件上, 或者作用到节点上, 而且该节点也作用着由式 2.9 计算出的横向固定边缘剪力和弯矩。然而, 某些计算机荷载通用程序仅能计算静力分布, 而固定边界力用手算是费时的, 在这种情况下, 最好保证梁格的横向间距小于标准车辆或列车荷载宽度的  $3/4$ 。通常, 这可以在梁构件之间设置虚拟的纵向构件, 如图 4.10c 所示 (也可参见第 4.5.3 节)。则荷载的静力分布在横向上不会减少梁上的扭转力。

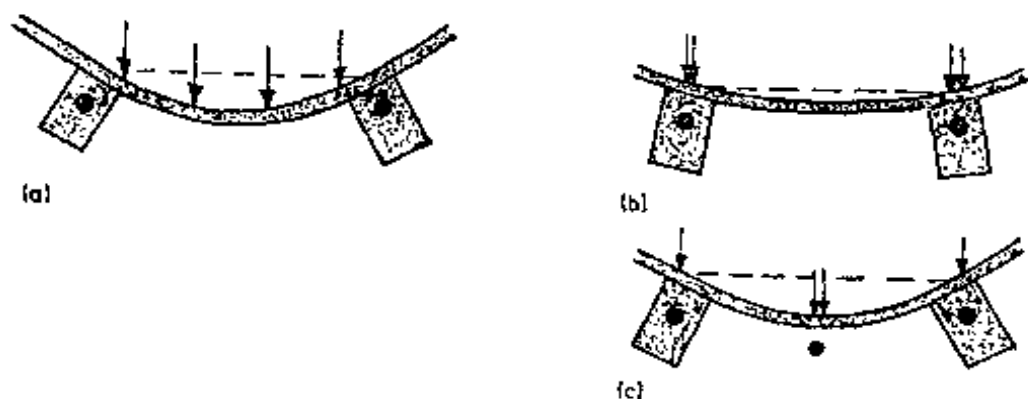


图 4.10 荷载的静力分布的误差

(a) 荷载; (b) 不正确的静力重分布; (c) 用虚拟构件来改善静力重分布

在集中荷载作用下, 薄板的两维系统产生的局部弯矩和扭矩不能由梁格求出, 而必须从威士特卡德 (Westergaard), 方程 (引自罗 (Rowe) [4]) 或简单的泼吉尔 (Pucher)

〔5〕的影响图表求得。应用这些方法，假定在梁与梁之间的板条有一等于梁边缘间的净距加上板的有效高度的跨径，而且，假定板沿其边缘是固定支承的。集中荷载的有效作用面积可以假定为沿垂直线向下从板的表面到板的中性面作  $45^\circ$  分布，从图表所求得的局部弯矩必须加上那些由于支承梁的扭转及相对挠度对板内所产生的弯矩。若在梁与梁之间没有虚拟构件而且横向构件没有荷载，则对于局部横向构件这些弯矩可以直接从梁格输出读数，若在荷载作用下有一“虚拟”纵向梁格或横向构件有荷载，则由于梁的扭转使板产生的弯矩，最好从梁格输出的相邻梁的位移和转角数据利用式 2.8 计算。

## 4.7 输出数据整理

图4.11为梁板式上部结构某一纵向梁部分的典型弯矩图。那里横向构件仅代表薄板，由于板内横向扭矩引起弯矩的不连续性是微小的，设计弯矩该取节点两侧弯矩的平均值（如第 3.7 节的板式上部构所述）。反之，如横向构件代表具有足够抗扭刚度的横隔梁，则纵向弯矩的不连续性是较大的，它代表跨越节点的实际弯矩变值。设计弯矩因而应该取节点两侧的不同值，而且等于梁格的输出弯矩。与此相似，

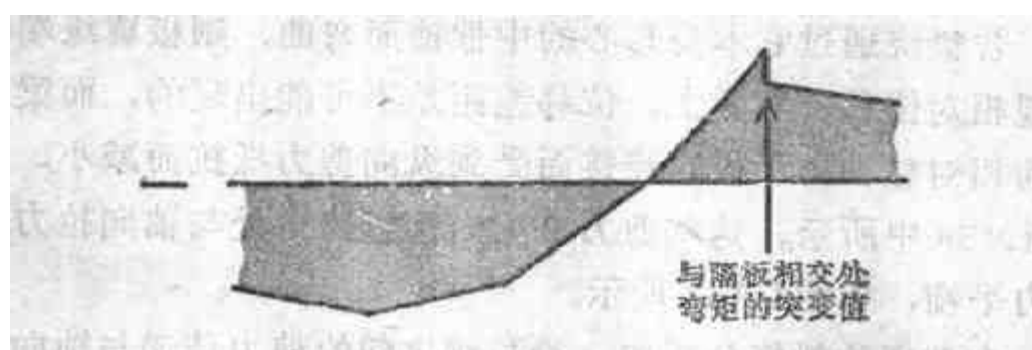


图4.11 梁板式上部结构在纵梁和横隔板交会处梁格弯矩突变图

对于横向板或横隔梁弯矩图内的不连续性代表具有强大抗扭的纵梁在连接处弯矩的实际改变值。

设计剪力和扭矩可以无须修正直接从梁格输出读出。

当梁格的刚度按结构两个分块的特性计算的，例如图4.6中“梁”和“板”，则输出扭矩（弯矩或剪力）按其刚度的大小按比例而分布至每根构件之中。一般来说，应用第二章公式有关假定，必须从梁格输出导出梁格构件截面特性的截面，用以计算原型的设计应力。

## 4.8 梁板式上部结构中板的薄膜作用

不言而喻，在上节讨论中，考虑纵向弯曲时，假定板可以视作一系列的板条，每一板条构成T梁的上翼缘。在划分上部结构后，对各部分位移的变形一致性未曾作过校核，也就是说，事实上，在没有附加力和迄今尚未考虑的扭转变形时，这些部分可以连成一起。

图4.12a为梁板式上部结构跨中截面由于不均匀荷载引起的挠度的放大图形。图4.12b表示设想已把组合梁割开，但是发生图4.12a中的扭转和挠度。适当地用梁格模拟这些挠度，并伴随板的垂直剪力和横向弯曲而进行荷载的传递。试在平面或纵面上观察已割出梁的端部，如图4.12c、d所示，若梁绕通过它本身形心的中性轴而弯曲，则板翼缘端部出现相对位移。实际上，位移差距是不可能出现的，而梁顶部的相对移动由于板的连接而受到纵向剪力抵抗面减小，如图4.13a中所示。这些剪力在梁内接近跨中处与轴向拉力或压力平衡，如图4.13b所示。

在普通的梁格分析中，梁与梁之间的剪力传递与轴向力平衡是不可能模拟，这些力在上部结构性能上有三种影响：

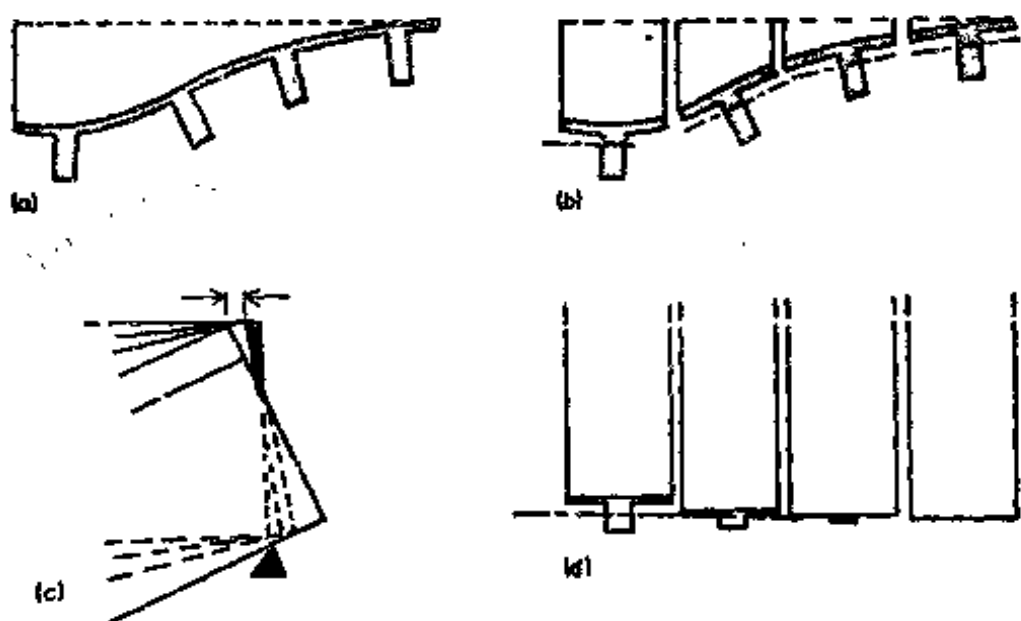


图4.12 梁板式上部结构的纵向翘曲移动  
(a)和(b)跨间截面；(c)支承处纵面；(d)支承处平面

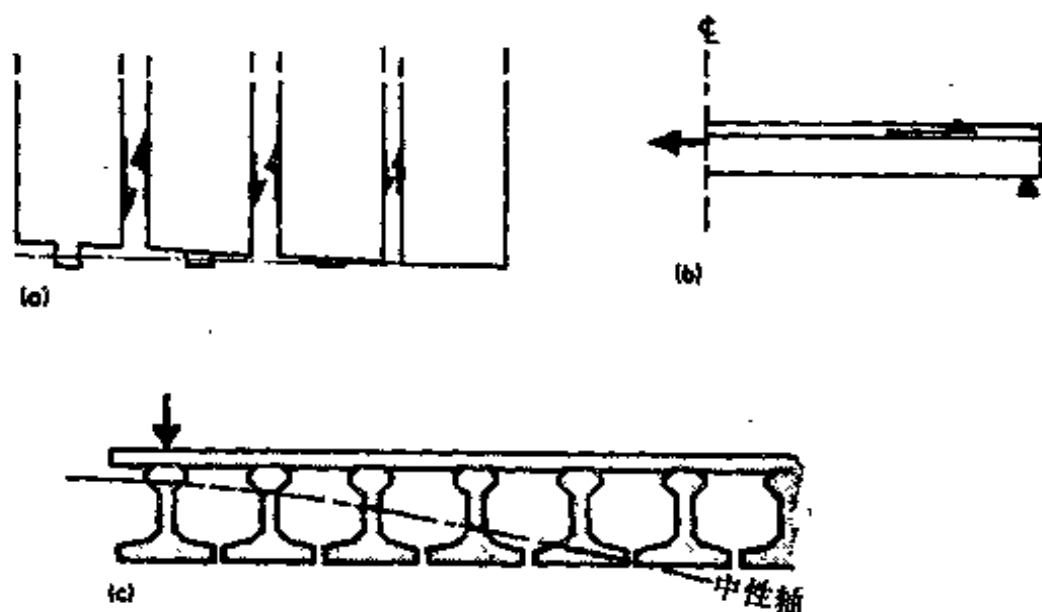


图4.13 在梁板式上部结构内板的薄膜作用效应  
(a)板平面内剪力；(b)梁内轴向力；(c)中和轴的移动

- (1) 板内剪力可能远远大于从梁格分析中所求得者。
- (2) 具有最大挠度（即在荷载之下）的梁内轴向拉力导致中性轴局部升高，而压力则使中性轴降低如图4.13c所示。
- (3) 上部结构的荷载分布特性改善了。如图4.13所示，

则纵向内梁剪力和轴力不在同一水平线上,因而出现力偶,它减少受载梁的弯矩而增加其它梁的弯矩。

通常假定如果上部结构的板承受剪力超过其由梁格分析所设计的强度,则将只有开裂或屈服而使图 4.13 中的力松弛。若上部结构在普通实用设计范围之外,则必须按第七,十二或十三章所述作三维分析。

图 4.13 中由于中性轴移动,结果使各梁及各连接的板的形心不在同一水平线上。若横向梁形心也在板平面以外,则性能将更复杂。然而相比之下,如下一章所述分格式上部结构的性能是较简单的,因为形心在腹板与面板之间的水平线上没有明显的改变。

#### 参考文献

1. West, R. (1973), C&CA/CIRIA Recommendations on the Use of Grillage Analysis for slab and Pseudo-Slab Bridge Decks, Cement and Concrete Association, London.
2. West, R. (1973), 'The use of grillage analogy for the analysis of slab and pseudo-slab bridge decks, Research report 21, Cement and Concrete Association, London.
3. Lampert, P. (1973), Postcracking stiffness of reinforced concrete beams in torsion and bending. Analysis of structural systems for Torsion, SP-35 American Concrete Institute, Detroit, pp. 384-432
4. Rowe, R. E. (1962), Concrete Bridge Design, C. R. Books, London.
5. Pucher, A. (1964), Influence surfaces of Elastic Plates, Springer Verlag, Wien and New York.

## 第五章 分格式上部结构： 剪力—柔性梁格分析

### 5.1 引言

这一章叙述变形的状态和内力的体系模型，这些都表明分格式上部结构的性能。并说明如何用剪力—柔性梁格分析法来研究这些性能。这个藉助计算机的方法的应用是由绍柯(Sawko[1])首先提出，并对各种结构形式作了说明。虽然剪力—柔性梁格在理论上严格的模拟分格式梁的性能不是有效的，但是，它广泛应用于不同的结构，而且相对节省计算机和使用者的时间的优点，并且比较易于理解，其缺点是过于着重分格式结构的特殊特性；在本章末提供了另一方法，可以较恰当用于特殊结构的分析。

### 5.2 结构类型

图 5.1 示出可以用剪力—柔性梁格分析的多种分格式结构。对于具有薄板封闭式，矩型宽的多格式上部结构来说（图 5.1a 所示），这种分析方法是最适宜的。它还可用于仅有一个或少数几个格室的上部结构，及具有斜腹板（如图 5.1c 所示）上部结构的分析，均可得到令人满意的精度。它还可以用于具有大量的圆柱型空洞式上部结构，如图 5.1e 所示。可以考虑到结构高度或板的厚度的变化，但不能考虑

到在梁腋处的拱式作用。上部结构在平面上还可以是弯的或变宽度的，因受到篇幅限制，将在第九章中介绍。横隔板可以设置在任何位置，并与纵向腹板成直交或者斜交。

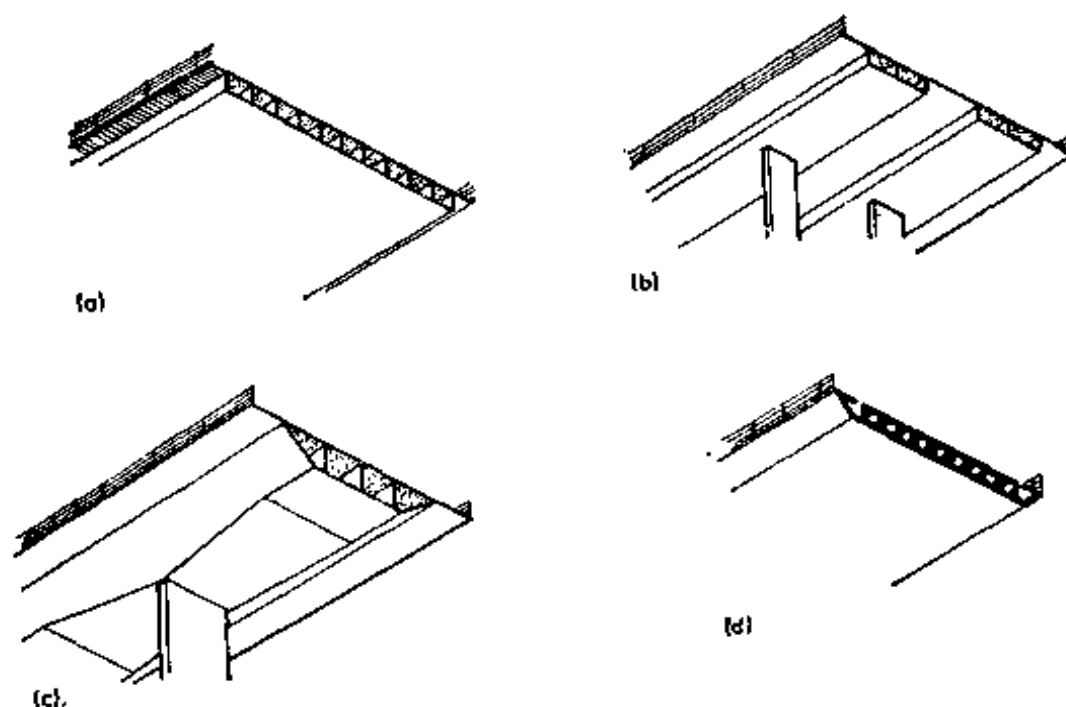


图5.1 分格式上部结构

### 5.3 梁 格 网 格

在下面的分格式梁的性能和梁格模拟讨论中，假定梁格网格是在上部结构弯曲的主轴平面内，全部纵向构件均与纵向腹板相重合。对于图 5.1 所示上部结构，其纵向构件的位置表示于图 5.2 中。选择这种布置可使腹板剪力直接由横截面的同一点上的梁格剪力来代表。其它的布置是可以的，但把力与刚度调整到构件上的方法与以后所述则有所不同。若上部结构有斜腹板，梁格模拟就不那样正确，而工程上的处理通常是调整纵向构件。在分格式结构分析中，通常不需要沿侧悬臂边缘设置构件。但是，若它们计入虚拟刚度，则

可以在计算机输入中简化编制悬臂荷载。单格式则将每一腹板用一根纵向构件的梁格来分析（若荷载合力是大偏心的，则用三维空间构架，如图7.15所示的褶皱板，或有限元法更为适宜）。

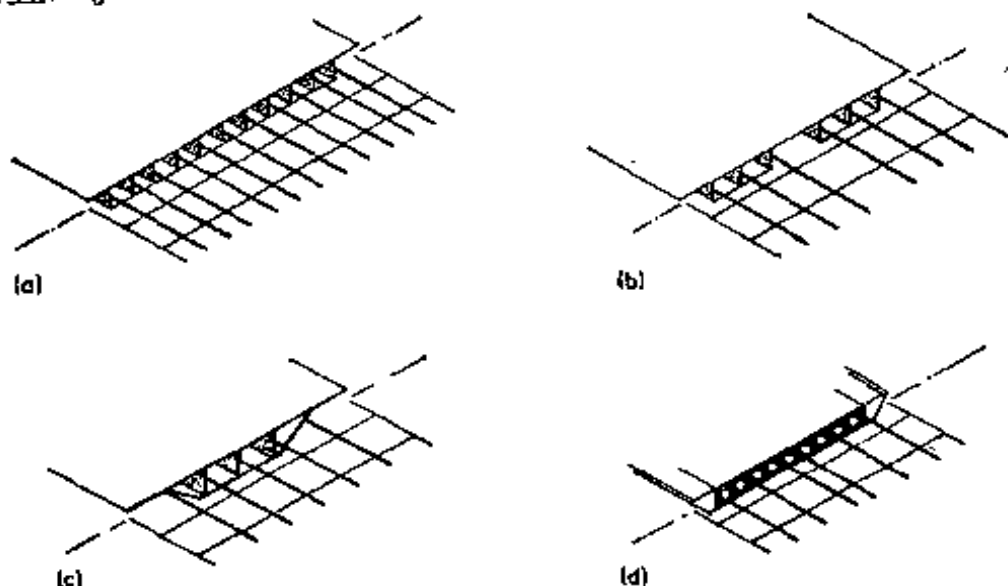


图5.2 分格式上部结构的梁格网格

图5.2所示横向构件，不管横隔板设置在何处，其间隔要接近于反弯点之间的距离的 $1/4$ ，除横隔板数量相当多者例外。如果横向构件间隔稀疏，由于在节点处弯矩过渡的不连续性，会使结果不精确。较密的间隔，则结构具有较连续的性能，而对力提供较详细的细节，但是，还不能使梁格特征性能接近于分格式上部结构。

下面我们将推导梁格构件的特性的原理，该原理是当梁格节点与结构相重合的点承受同样的挠度与转角时，由构件刚度产生内力，局部地静力等效于结构内力的情况下导出的。

## 5.4 结构作用状态

图5.3示一分格式上部结构横截面在荷载作用下的变形



与位移，可划分成四种基本状态：纵向弯曲，横向弯曲，扭转及扭转变形。每一种状态的特征和模拟将在下面叙述。

#### 5.4.1 纵向弯曲

假设把上部结构在腹板之间纵向切开成许多工字梁（如图 5.4 所示），就可以使上部构造纵向弯曲形象化。在图 5.5a 中，横截面上的纵向弯曲应力与承受着与上部结构相同的曲率的工字梁的应力相似。于是有

$$\frac{\sigma}{z} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R} \quad (5.1)$$

由于弯曲产生的剪应力分布也与从具有横向和纵向剪力流的“工字梁”的简单梁理论所得者相似，由此得到

$$r = \frac{S_M A \bar{z}}{I} \quad (5.2)$$

式中： $A$  和  $\bar{z}$  为翼缘部分面积和考虑点对重心的偏心值。 $S_M$  为由于弯曲在工字梁内（即在腹板内）产生的垂直剪力，并由下式得出：

$$S_M = -\frac{dM}{dx} \quad (5.3)$$

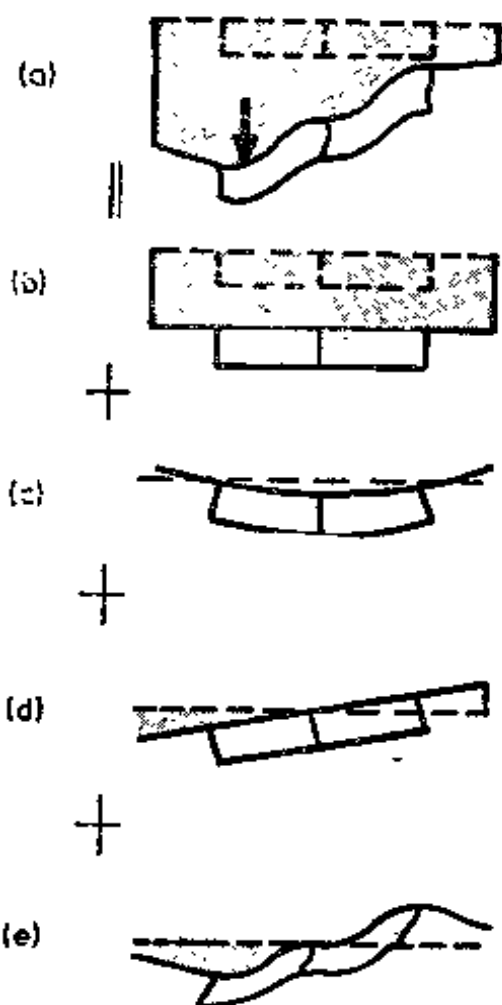


图5.3 变形的基本状态  
(a)全部；(b)纵向弯曲；(c)横向弯曲；(d)扭转；(e)扭转变形

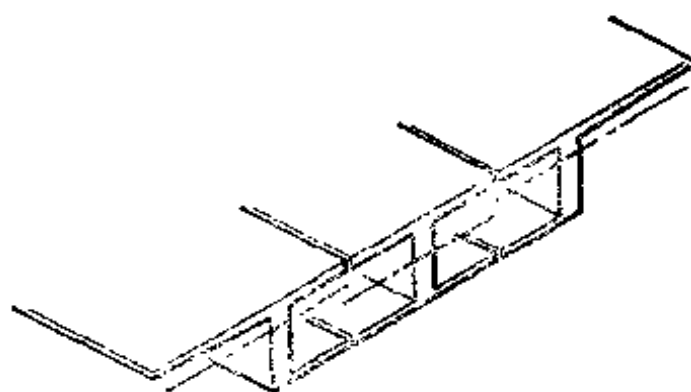


图5.4 分格式上部结构沿格室中央切开划分成工字梁

$S_M$  仅为腹板内垂直总剪力的一部分，该腹板还有由于扭转产生的另一剪力分量  $S_T$ 。

图5.4表示在两腹板中央处切开的上部结构。正如边梁有一宽的悬臂顶板时，梁的重心就不在同一水平上，因而分别各自受弯，但每一梁沿其中性轴的伸长值将为零。如图5.6

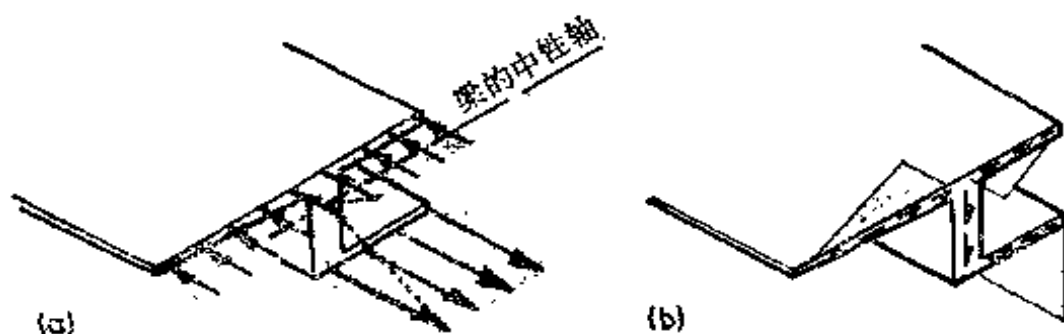


图5.5 绕本身中性轴的边梁弯曲  
(a)弯曲应力；(b)剪力流

所示，接近端部各截面将绕不同水平面上的点而转动，因而产生一相对的纵向位移值  $u$ 。这个位移由顶板和底板的相当大的抗剪刚度来抵抗而减小，而且所有的梁受载后均绕同一中性轴而弯曲。这中性轴实际上与整体

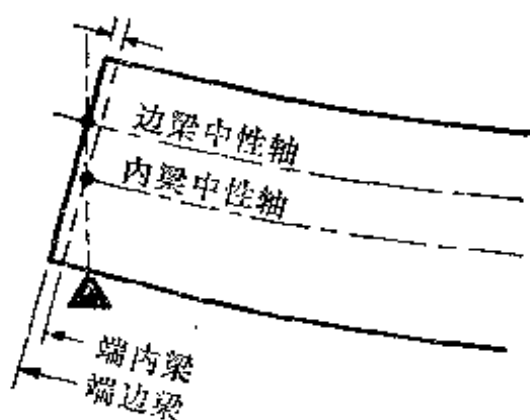


图5.6 具有不同中性轴的梁的相对端位移

的上部结构的主轴是重合的。因此，梁格构件所代表的每根工字梁的截面特性将绕整体的上部结构主轴来计算。根据这些特性，以共同的中性轴量起的 $z$ 值使用式5.1计算弯曲应力。

虽然分格式上部结构分成“工字梁”多少是任意的，从实用目的来说，按式5.1计算的应力可以认为精度是满足要求的。切割位置的微小变动会改变梁格惯性矩的相对值，从而引起不同的弯矩分配值，但是对任何梁格来说，比值 $M/I$ 仍然是个常数，故计算弯曲应力不受影响。然而，因为翼缘面积 $A$ 是任意的，所以根据式5.2所计算的剪力流仅仅是近似的；如果上部结构切割成工字梁时，使其本身的重心是在上部结构的主轴上，这些误差就可以避免。例如图5.7中，只将板切开，使得每一块腹板有相同的顶板和底板的比值，各自分开弯曲应力和剪力流的分布，如图5.8所示。如前一样，弯曲应力可由式5.1计算，式中 $I$ 为图5.7的不对称截面梁的惯性矩，而 $z$ 为从梁（以及上部结构）中性轴算起的距离，由弯曲所产生的剪力流就可正确地由式5.2来计算。其中， $\bar{z}$ 和 $I$ 与图5.7中相应。

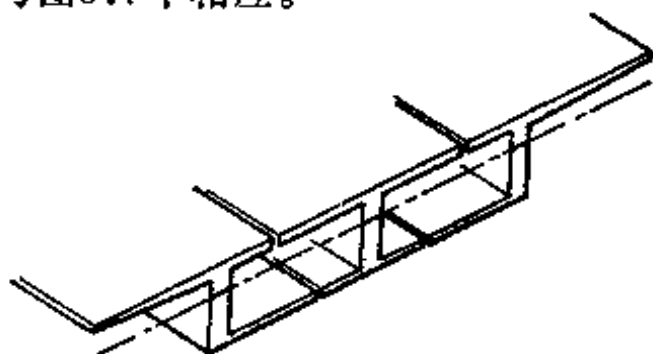


图5.7 分格式上部结构分成具有共同中性轴的工字梁

在上述讨论中，曾假定工字梁在纵向弯曲时考虑剪力刚性的作用。若翼缘很窄（即格室宽度和悬臂不大），这个假定是合理的。但是，若翼缘是宽的，剪力变形降低了截面的

有效性，因为有效翼缘的有效宽度将予折减，正如在设计 T 形梁和 L 形梁所考虑的一样。这种由于剪力滞后的有效折减将在第八章中讨论。另外，在横贯工字梁宽度上弯曲的压和拉应力假定是均匀的。若横贯上部结构的梁承受不同的曲率，则横贯上部结构的弯曲应力是变化的。这种变化是连续的而且略去剪力滞后，在腹板之间可以假定为线性变化。因此式 5.1 的应力代表横贯工字梁的平均应力。

从上而讨论中，显然分摊到纵向梁格的惯性矩必须绕整体上部结构的主轴来计算，假如可能的话，梁格需切成如图 5.7 所示的上部结构的一部分，它的重心在这根轴上。然而对于如图 5.1c 的上部结构，顶根是远宽于底板的。而这样划分横截面所给出的梁，其横截面是不合理的。在这种情况下，虽然精确度受到损失，但是，上部结构沿纵向梁格之间对中切开，仍是合适的；而构件的惯性矩和截面模量仍然取绕整体上部结构的主轴来计算。

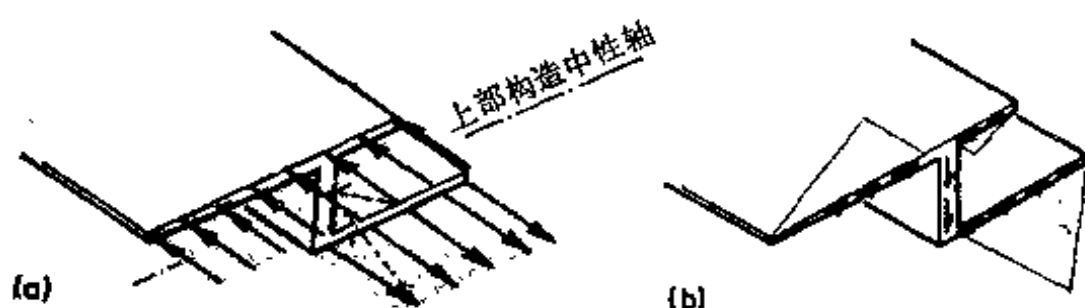


图 5.8 形心在上部结构中性轴上的边梁的弯曲  
(a) 弯曲应力；(b) 剪力流

#### 5.4.2 横向弯曲

如图 5.9 所示的横向弯曲，是顶板和底板一致地绕它们的共同重心的水平中性轴而弯曲，如同有一剪力刚性腹板将它们连接一样。这种横向弯曲不计入顶板和底板单独弯曲所导致的格室的扭转变形，如图 5.3c 所示。

横向梁格的惯性矩系绕板的共同重心来计算，即为：

$$i_c = (h'^2 d' + h''^2 d'') = \frac{h'^2 d' d''}{(d' + d'')} \quad \text{每单位长度} \quad (5.4)$$

式中： $d'$ ， $d''$ ， $h'$ ， $h''$ 为板的厚度和各板至它们的形心的距离，如图5.9所示。若横向梁格还包括一块横隔板，则惯性矩计算要计入这块横隔板。

梁格分析中，纵向和横向弯矩交会处是略去泊松比的影响的。这在狭窄的上部结构中，当横向弯矩是很小时，引起误差是很小的，因为上部结构在横向上可以自由拱曲，正如一根梁受有纵向下挠弯矩一样。如上部结构较宽，格室的扭转变形的刚度又很小而泊松比又较大时，则所计算的横向弯矩误差就相当大。由于纵向弯矩对横向弯矩的影响，使得横向弯矩有可能比由于横向下挠产生的横向弯矩为大。但是由于混凝土泊松比较小（约为0.15），它的影响通常是忽略的。

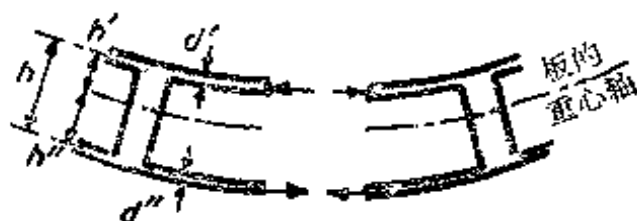


图5.9 横向弯曲

### 5.4.3 扭转

“扭转”一词应用到分格式上部结构时，即为图5.3d所示的受扭上部结构产生的剪力和变形，而没有如图5.3e的横截面扭转变形的影响。

当分格式上部结构作整体扭转时，则环绕板和腹板呈现向上和向下的剪力流网路（如图5.10a所示），大多数的剪力流通过围绕着板和腹板的周界流动，但某些较短的途径则通过中间腹板。当梁格以相似的方法受扭时，横截面的横向受力则示于图5.10b中。在横截面上，总的扭矩系由一部分

纵向构件的扭矩和一部分上部结构两侧的相反剪力构成。图5.11则表示这些剪力在横向构件内与扭矩平衡。事实上，图5.10<sup>b</sup>非常相似于图5.10<sup>a</sup>的力系。若在两腹板之间切开(如图5.12所示)时，可以看出梁格扭矩代表由于顶板和底板内相反剪力流在上部结构内形成的扭矩，而梁格剪力  $S_r$  代表腹板内剪力流。

一根纵向或横向梁格构件的抗扭刚度等于构件所代表的顶板和底板刚度。它们的抗扭常数与象两层厚度的实体板一样，即

$$c = 2(h'^2 d' + h''^2 d'') = \frac{2h^2 d' d''}{(d' + d'')} \quad (5.5)$$

(格室每单位宽度)

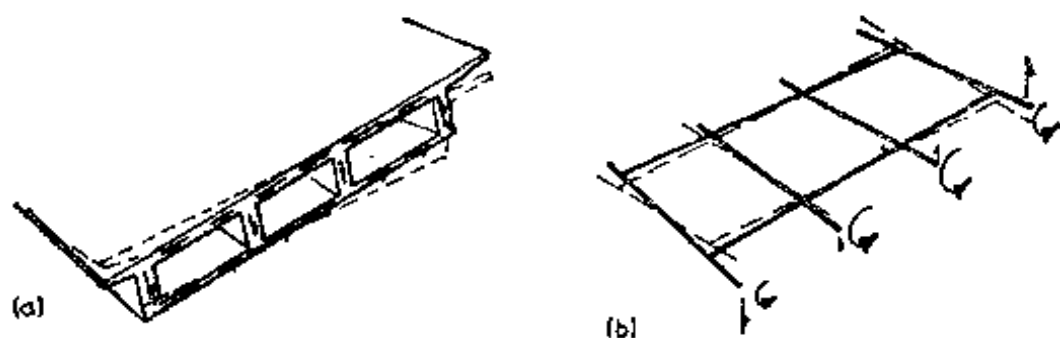


图5.10 受扭的上部结构和梁格在横截面上的扭力  
(a)上部结构内的剪力流；(b)梁格内的扭矩和剪力

这些常数等于宽箱每单位宽度的圣维南(Saint-Venant)抗扭常数(见第2、4、3节)之半。正如第三章所述，如作为梁来处理则梁格纵向构件抗扭刚度的总和仅为截面的圣维南抗扭刚度之半。这反映出一个事实：即当梁格受扭时，纵

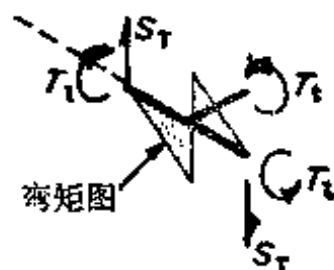


图5.11 边梁格内横向扭矩和剪力的平衡

向构件扭矩仅提供横截面上总扭矩的一半，另一半则由上部结构对边上相反的垂直剪力来提供。当上部结构在横截面上扭矩各不相同（如图5.13所示）时，则在板与梁之间抗扭常数的关系就不复适用了。但是，梁格和分格式上部结构力系的静力等效性仍然保留。

由于剪力流使腹板受有剪切变形，因此必须使纵向梁格的剪切面积等于腹板的横截面的面积。

#### 5.4.4 扭转变形

当格室有少数或没有横隔板及内支撑时，则横贯格室的垂直剪力导致面板和腹板发生各自越出范围的挠曲，出现图5.3e所示扭转变形。这种变形的模型非常相似于与上部结构横截面相似的空腹桁架纵剖面。虽然这种性能在宽坦的梁格内不可能正确地再作出模型，但这个性能的近似值可由剪切刚度较小的横向梁格得到，即选择梁格刚度使格室承受同样的剪力时，它们受着相似的扭转变形，如图5.14所示。在这种模拟中，其误差为梁格构件的剪力是单独与剪切位移成比例，而在格室内，剪力在某种限度内系根据相邻格室从板的弯曲的弯矩的连续性而定。幸好，在整个结构性能上这种差别的影响是微小的。

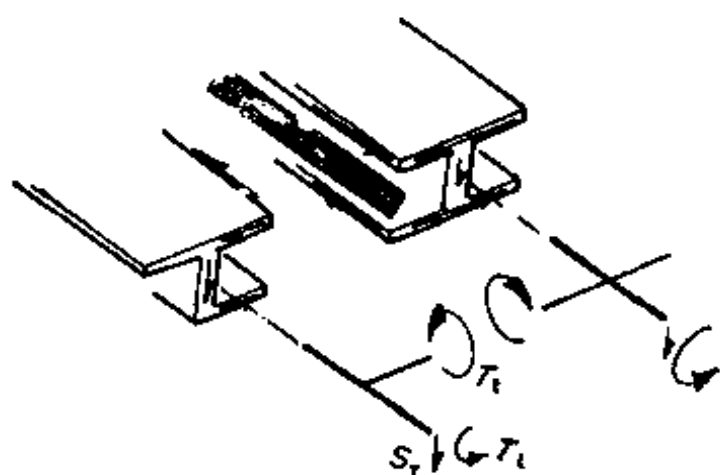


图5.12 上部结构和梁格内静力等效扭矩

为了求出横向梁格的等效剪切面积，必须求出横贯格室的垂直剪力与图5.14所示的有效剪切位移  $w_s$  之间的关系。一个具有不同顶板和底板及腹板厚度的格室，用精确构架分析法导出的方程式带来了几乎不可能处理的复杂性。但假定剪力在顶板和底板之间按其弯曲刚度比例而分布，以及假定在腹板之间的中点处有反弯点，就可求得合适的近似解答。横贯格室每单位宽度的垂直剪力因而可近似地由下式得出：

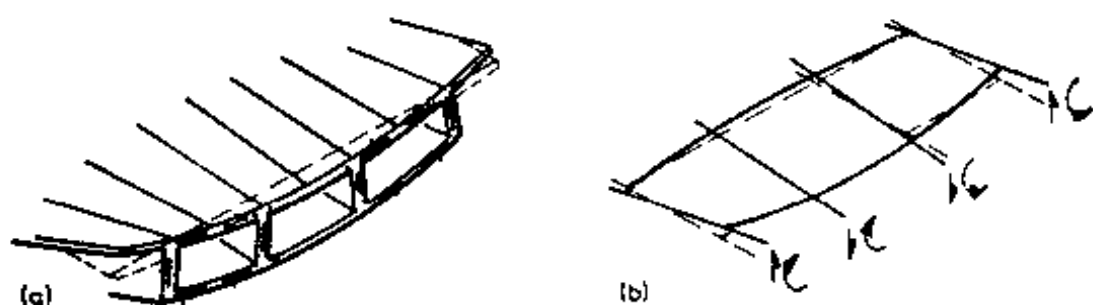


图5.13 不均匀扭转  
(a)上部结构；(b)梁格

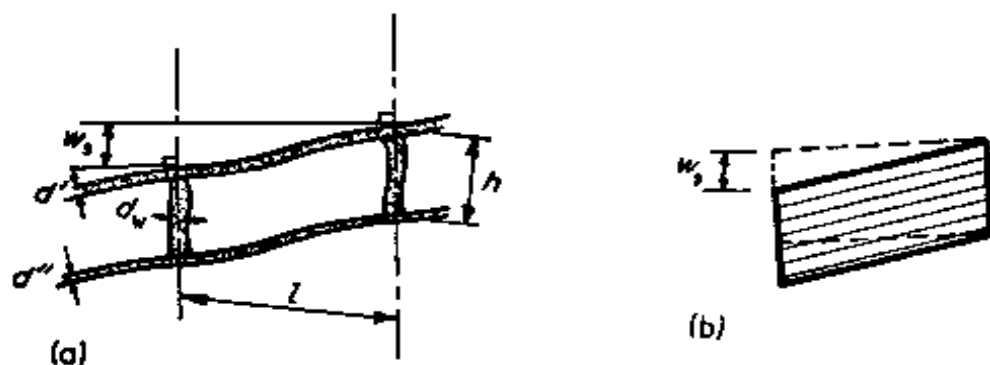


图5.14 格室扭转变形与梁格构件等效剪切变形  
(a)格室畸变；(b)剪切变形

$$s \approx \frac{(d'^3 + d''^3)}{l^3} \left[ \frac{d_w^3 l}{d_w l + (d'^3 + d''^3)h} \right] E w_s \quad (5.6)$$

式中  $d'$ 、 $d''$ 、 $d_w$ 、 $l$  和  $h$  系图5.14所示的尺寸。



对于剪力柔性梁格构件，剪力和剪切位移间的关系为：

$$s = \frac{a_s G w_s}{l} \quad \text{每单位构件宽} \quad (5.7)$$

式中： $a_s$  为构件的等效剪切面积。

令式5.6和5.7的刚度相等，则得出下列梁格构件等效剪切面积的表达式。

$$a_s = \frac{(d'^3 + d''^3)}{l^2} \left[ \frac{d_w^3 l}{d_w^3 l + (d'^3 + d''^3) h} \right] \frac{E}{G} \quad \text{每单位宽度} \quad (5.8)$$

若上部结构内的腹板比实际设置的纵向梁格的间距小得多，则横向的  $a_s$  仍然用实际的格室和腹板尺寸来计算。

上述的表达式严格地仅适用于矩形横截面的格室上。若上部结构有三角形或梯形格室（如图5.15a所示），则上述式子就不能适用，而抗剪刚度必须从同样形状的构架作构架分析导出，构架尺度取上部结构的单位长度。对于复杂的横截面，使用计算机作平面构架分析是十分方便的。当构架支承如图5.15b所示时，因而它不能转动而且承受扭转剪力 $s$ 。每一格室的抗剪刚度则为  $s$  除以横贯格室的相对垂直移动。令其等于式5.7中的刚度 ( $a_s G/l$ )，则求出横贯格室的梁格构件的等效剪切面积。



图5.15 梯形格室的抗剪刚度的平面构架分析  
(a)上部结构横截面；(b)承受扭转变形的平面构架

如图5.1d所示具有圆柱形空心的上部结构的横向剪切面积，可以近似地设想由相同的横截面面积的方形空心截面来

代替圆柱形空心。因此式 5.8 可按方形空心的上部结构尺度来应用。由于方形空心比圆柱形较为柔性，故对所计算的抗剪刚度就估计过低。另一个方法是制造一个上部结构横截面如图 5.16a 所示泡沫塑料的模型，模型扭转变形的挠度可和具有相同惯性矩（如在空心中心线上）的实体截面

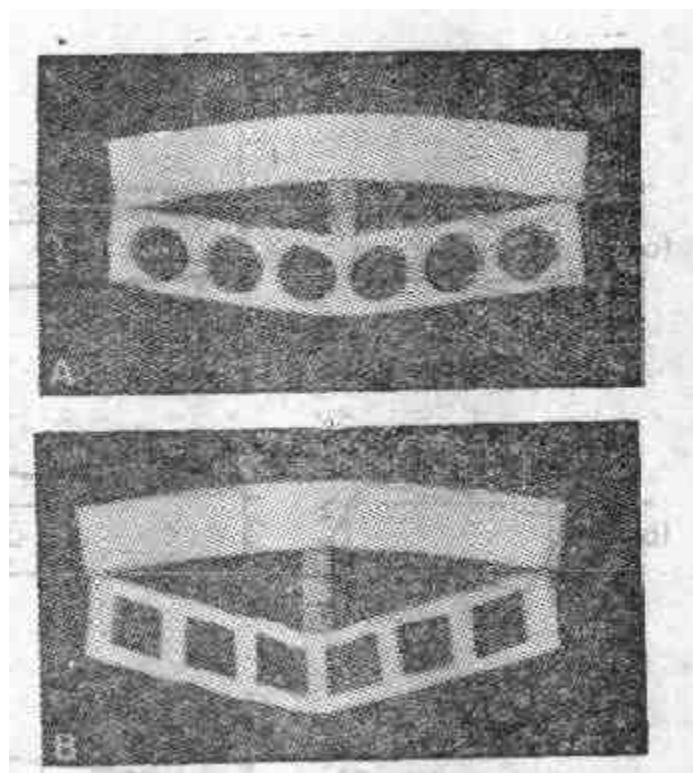


图 5.16 泡沫塑料分格式梁与实体梁背靠背弯曲以比较在相同荷载下的挠度

梁的挠度作比较求出。图 5.16b 表示具有相同面积的空心空腹梁的扭转变形。为了减少徐变的效应，需要在同一准确时间间隔内对梁加载和试验。

当横向梁格代表具有横隔板的格室部分时，等效剪切面积是比较大的，故应计入横隔板的横截面面积。

格室扭转变形不仅使顶板和底板及腹板出现超出范围的挠曲，而且也受到这些板单元的平面内的弯曲及剪切所抵抗。图 5.17a 表示格室的横截面和纵剖面，它的表面作平面内弯曲，而图 5.17b 表示格室由于格室平面内剪力而有扭转变形。确切地说引起图 5.17b 扭转变形的剪力流可以与图 5.17c 中产生的扭矩相同。若阻止面的扭转变形，则在图 5.17c 中发生扭转面不致改变横截面的形状，但形成横截面的翘曲（即在角隅处发生相反的纵向移动），若上部结构具有抵抗翘曲的刚度比抵抗扭转变形的刚度为大，则面上的剪

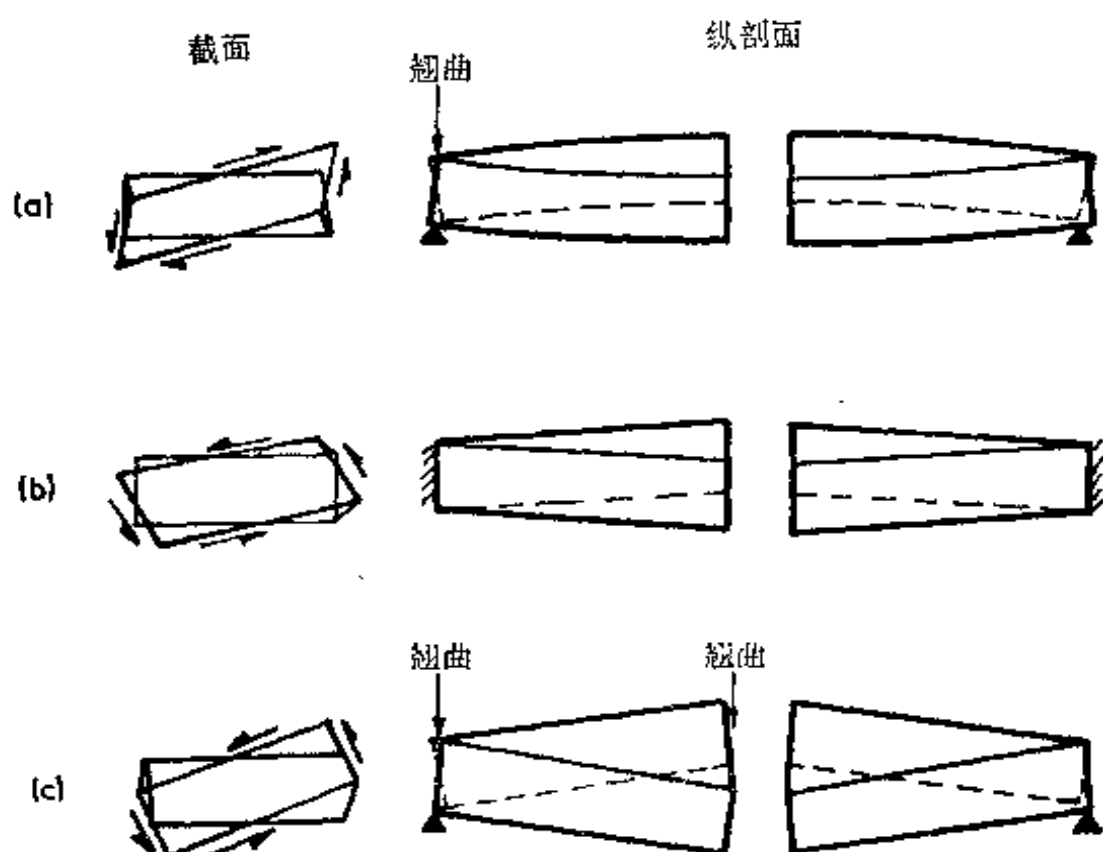


图5.17 格室扭转变形和板在平面变形的扭转

(a)板在平面内弯曲的扭转变形； (b)板在平面内受剪的扭转变形；  
(c)板在平面内剪切的扭转

切变形导致格室的扭转变形（如图5.17b所示）。

把扭转与扭转变形的效应分开考虑是会被弄糊涂的，为此把这种性能简单地考虑为“纵向扭转”和“横向扭转”的组合情况，如图5.18a、b所示。在图5.18a的“纵向扭转”中，顶板和底板随着腹板扭转的相反方向上横向受剪，但当正面观察时，腹板无相对的纵向斜率。另一方面，在“横向扭转”中，顶板和底板随着腹板挠曲的相反方向上纵向受剪，而在正面图中具有不同斜率但无扭转。在宽的上部结构中，顶板和底板在平面内弯曲刚度很大，阻止它们在相反方向上横向挠曲，因此，腹板仍然有效地控制垂直的和横向的扭转。

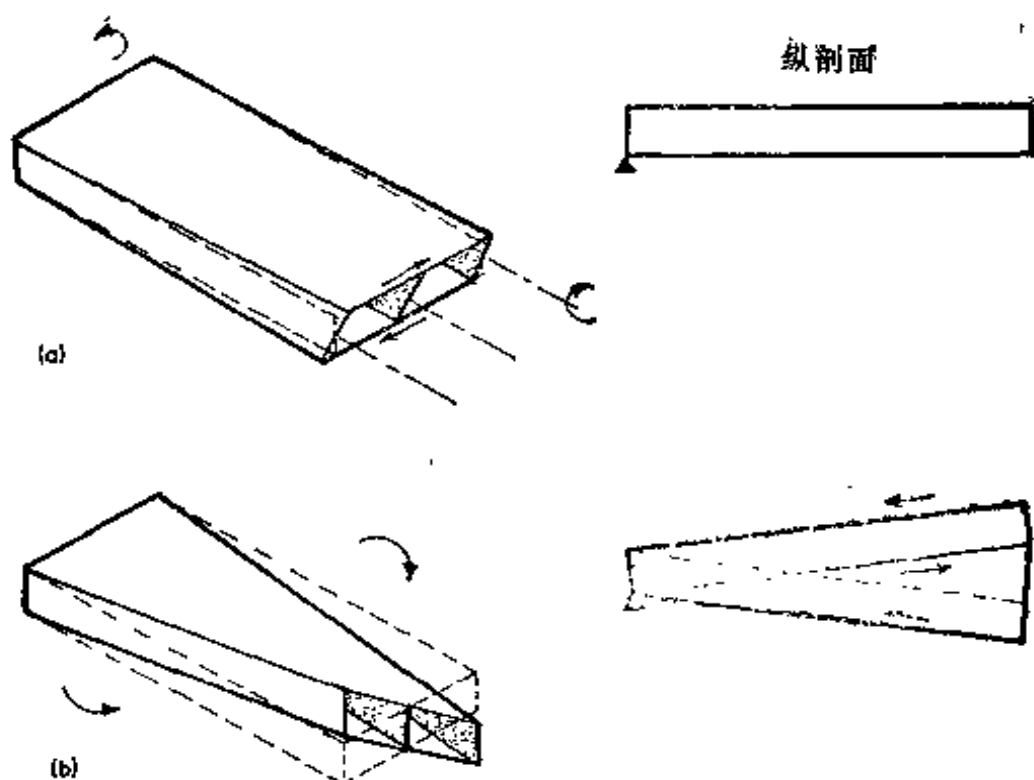


图3.18 (a) “纵向扭转”；(b) “横向扭转”

当受扭转变形的分格式上部结构的扭转在两个方向上不同时，在顶板和底板内横向和纵向的剪力流必须仍然是互等的，因此，每单位宽度和每单位长度的扭矩仍然相等。确切说，梁格不能够代表这个性能，因为在梁格中纵向与横向扭转之间互无影响。然而，若梁格的纵向和横向构件承受和分格式结构相同的纵向和横向扭转，则梁格扭矩仍然可以与分格式结构内的剪力流静力等效。图5.19a, b 和 c 表示的分格式上部结构的顶板和底板单元，承受着相同的纯扭转剪力流，即“横向扭转”、“纵向扭转”。由于剪力流是相等的，所以剪应变相等，因而在两个方向上扭矩的总和也相等。在图5.19a 中的变形是在两个方向上以相等扭率  $\dot{\phi}_A$  引起的纯扭；在图5.19b 中的变形是横向扭率  $\dot{\phi}_t = 2\dot{\phi}_A$ ，而纵向扭率  $\dot{\phi}_l$  等于零的“横向扭转”；而在图5.19c 中的变形是纵向扭率  $\dot{\phi}_l = 2\dot{\phi}_A$  和  $\dot{\phi}_t = 0$  的“纵向扭转”。图5.19a,

b 和 c 中还示出梁格代表着承受相同扭率的格室单元。若它们的抗扭常数对图5.19a 的纯扭用式5.5导出，如所指出，则（图5.19b 和 c）的扭矩与扭率成比例。所有这些梁格体系

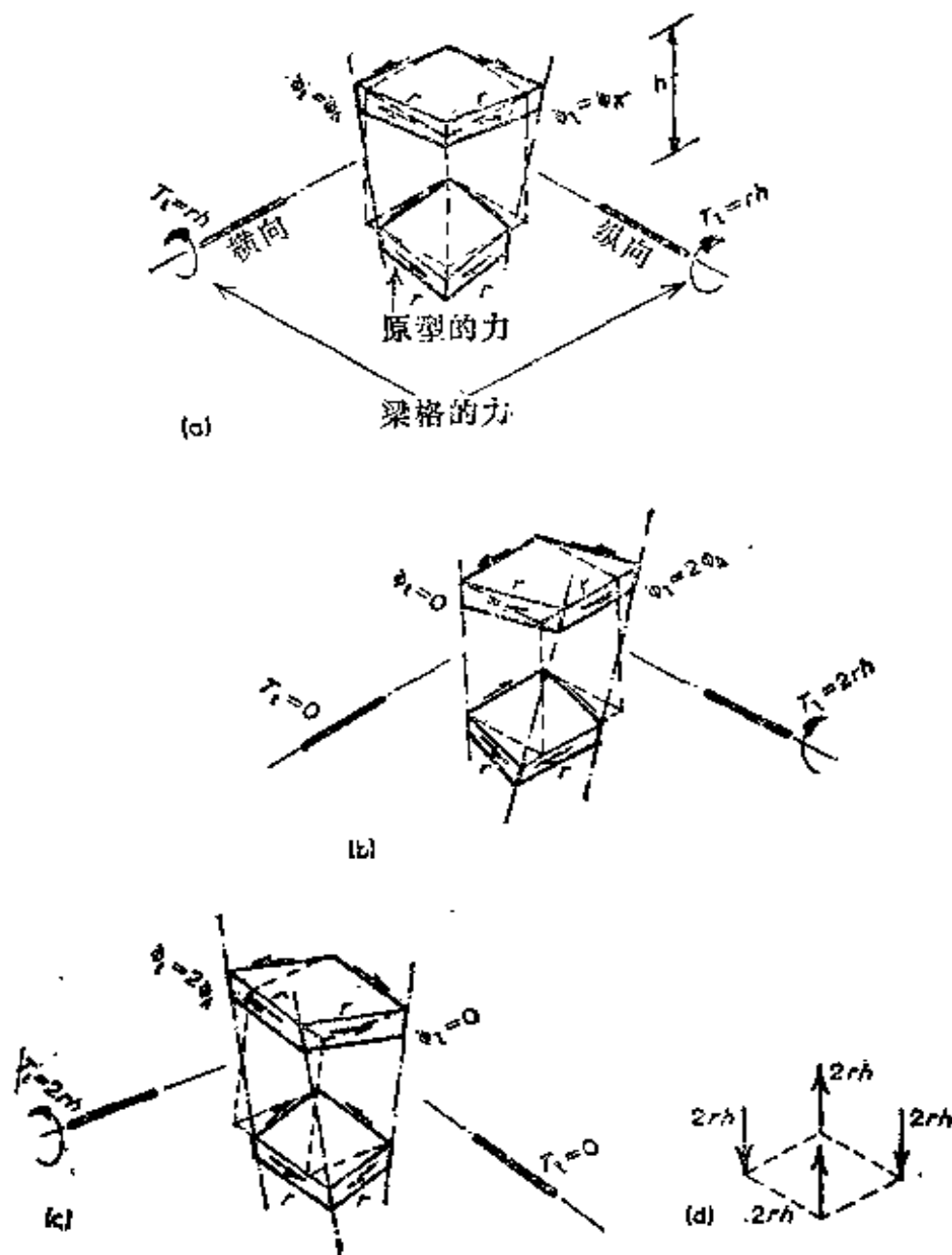


图5.19 格室单元上扭力的静力等效值  
(a)纯扭转；(b)“纵向扭转”；(c)“横向扭转”；(d)静力等效力

的扭矩和格室剪力流在静力上与图5.19 d的力系相互等效。

虽然在上部结构内的扭矩，和按一个方向的构件计算得到的梁格扭矩有明显的不同，但它应当接近从横向和纵向构件两者所计算的平均扭矩。因而在梁格输出数据整理过程中，每单位格室的宽度和长度的扭矩两者对于局部的横向和纵向构件（每单位构件宽度）应采取输出扭矩的平均值来计算。

## 5.5 梁格的截面特性

这一节总结前一节的结论和说明三种不同的上部结构梁格截面特性的算例。对于格室、面板以及腹板的尺寸的符号示如图5.14 a。

### 5.5.1 三跨双格室箱型梁式上部结构的梁格

图5.20为一与支座成 $21^\circ$ 斜交的三跨双格室箱型梁的详图。所选择的梁格网格是具有与腹板重合的三根“结构的”纵向构件2、3和4，两根“虚拟”构件1和5则沿悬臂边缘设置。代表顶板和底板的横向构件则与纵向构件正交。它们沿跨度方向的间隔接近反弯点 $1/4$ 的距离，但在中间支点上间隔较小，以便能更明确表示弯矩图在高峰处的较详细数据。端部斜交构件代表面板和横隔板，而在内支点上斜交构件正好代表没有翼缘的实体横隔板。

纵向“结构”构件2、3和4的惯性矩，可从图5.20b中的上部结构切开成“工字梁”求得，因此每一“工字梁”的形心是在上部结构的主轴上。在此种情况中，每一根梁计入三分之一顶板和三分之一底板。每根梁的惯性矩是上部结构总惯性矩的三分之一，即：

$$I_2 = I_3 = I_4 = \frac{1.54}{8} = 0.51 m^4$$

上述计算忽略了由于剪力滞后引起截面有效翼缘宽度的折减值。在这种上部结构中是明显的。特别是接近中间的支点更为明显。第8.2节所述的简单的修正值是完全必要的。

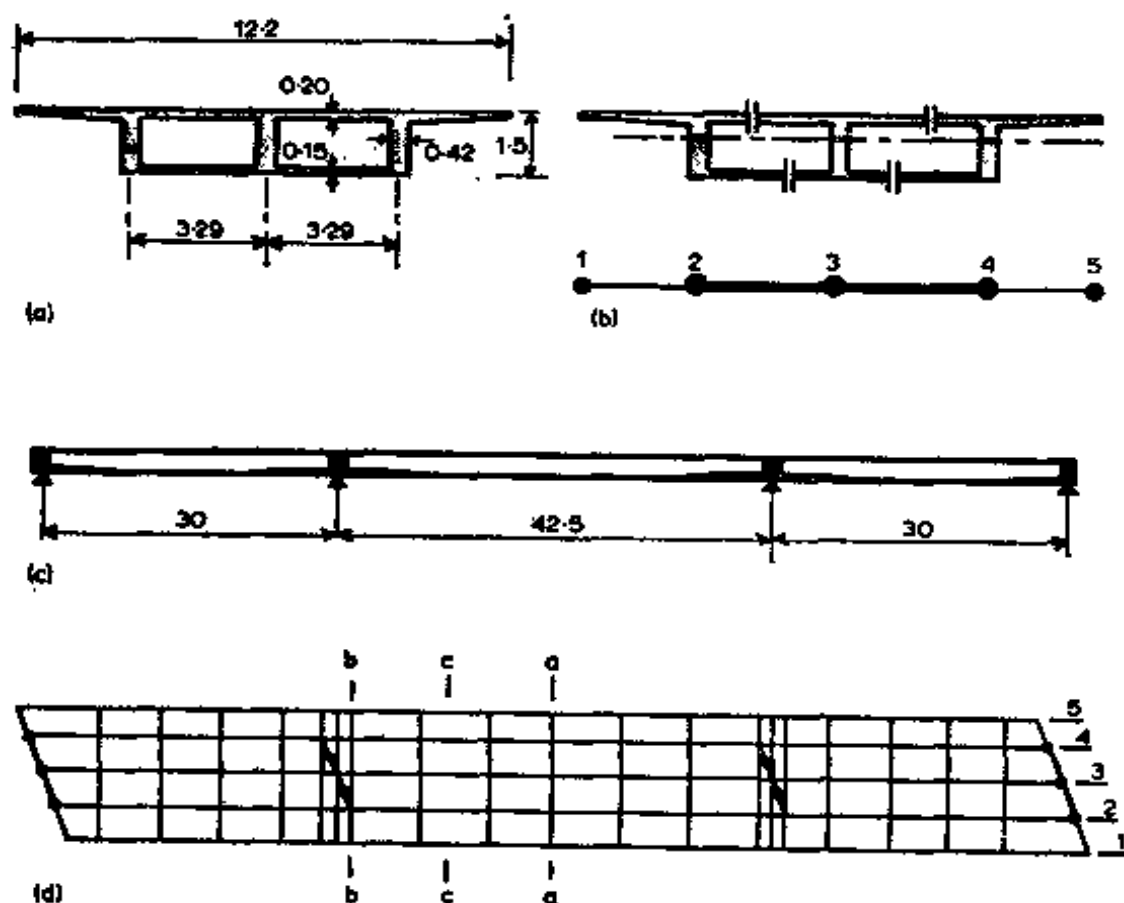


图5.20 三跨双格室混凝土箱型梁式上部结构的梁格  
(a)上部结构截面；(b)梁格截面；(c)上部结构纵向截面；(d)梁格网格

每单位宽度的抗扭常数可由式5.5算出。

$$c = \frac{2h^2 d' d''}{(d' + d'')} \text{ 每单位宽度}$$

$$c = \frac{2 \times 1.325^2 \times 0.2 \times 0.15}{(0.2 + 0.15)} = 0.30 m^4 m^{-1}$$

在构件 2、3 和 4 中，格室宽度分别为  $3.29/2$ 、 $3.29$  和  $3.29/2$ ，因此它们的抗扭常数为：

$$C_2 = C_4 = \frac{3.29}{2} \times 0.30 = 0.49m^4$$

$$C_3 = 3.29 \times 0.30 = 0.99m^4$$

构件 2、3 和 4 的剪切面积等于腹板面积。

$$A_{s2} = A_{s3} = A_{s4} = 0.42 \times 1.325 = 0.56m^2$$

接近支点处上部结构的底板是较厚的，在这些区域中，如同上述每一梁格的特性以同样的方法沿其长度取位于中间的截面来计算。

“虚拟”边构件为悬臂的截面特性的一半。

$$I_1 = I_5 = \frac{bd'^3}{12} = \frac{2.81}{2} \times \frac{0.2^3}{12} = 0.00094m^4$$

$$C_1 = C_5 = \frac{bd'^3}{b} = \frac{2.81}{2} \times \frac{0.2^3}{6} = 0.0019m^4$$

$$A_{s1} = A_{s5} = bd' = \frac{2.81}{2} \times 0.2 = 0.28m^2$$

代表格室的横向构件的截面特性由式 5.4、5.5 和 5.8 给出：

$$i_{23} = \frac{h^2 d' d''}{(d' + d'')} \quad \text{每单位宽度} \quad (5.4)$$

$$= \frac{1.325^2 \times 0.2 \times 0.15}{(0.20 + 0.15)} = 0.15m^4m^{-1}$$

$$C_{23} = \frac{2h^2 d' d''}{(d' + d'')} \quad \text{每单位宽度} \quad (5.5)$$

$$= 2 \times 0.15 = 0.30m^4m^{-1}$$



$$\begin{aligned}
 a_{s23} &= \frac{(d'^3 + d''^3)}{12} \left[ \frac{d_w^3 l}{d_w^3 l + (d'^3 + d''^3)h} \right] \frac{E}{G} \\
 &= \frac{(0.2^3 + 0.15^3)}{3.29^2} \\
 &\quad \left[ \frac{0.42^3 \times 3.29}{0.42^3 \times 3.29 + (0.2^3 + 0.15^3) \times 1.325} \right] \times 2.3 \\
 &= 0.0024 m^2 m^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

悬臂上的横向构件特性按顶板计算：

$$i_{12} = \frac{d^3}{12} \text{ 每单位宽度} = \frac{0.2^3}{12} = 0.00067 m^4 m^{-1}$$

$$e_{12} = \frac{d^3}{6} \text{ 每单位宽度} = \frac{0.2^3}{6} = 0.00134 m^4 m^{-1}$$

$$a_{s12} = d \text{ 每单位宽度} = 0.2 m^2 m^{-1}$$

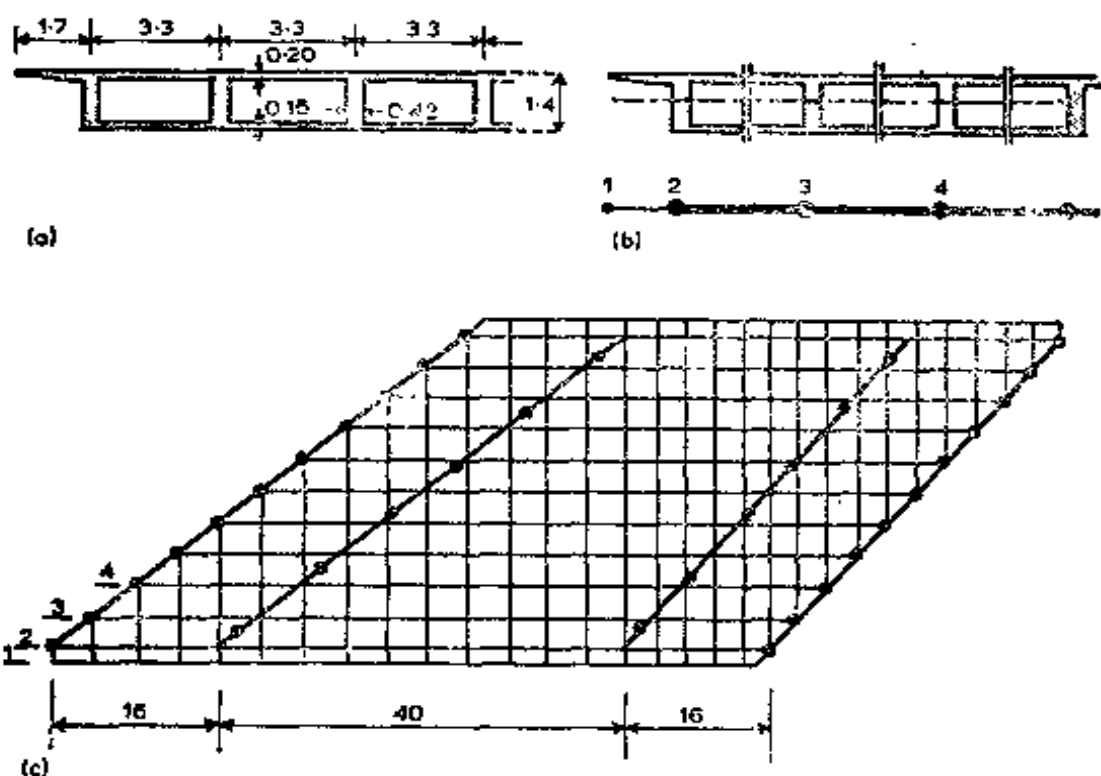


图3.2! 三跨斜交多格室混凝土上部结构的梁格  
(a)上部结构部分截面；(b)梁格截面；(c)梁格网格

代表内横隔板 (宽 $1.5m$ ) 的斜交构件为实体截面的特性。其抗扭常数的推导参见第 2.4.2 节。

$$I = \frac{1.5 \times 1.325^3}{12} = 0.29m^4$$

$$C = \frac{3 \times 1.5^3 \times 1.325^3}{10(1.5^2 + 1.325^2)} = 0.59m^4$$

$$A_s = 1.5 \times 1.325 = 2.0m^2$$

### 5.5.2 宽多格室上部结构的梁格

图5.21为斜交角很大的三跨多格室上部结构的详图。如果和上例一样, 只是把上部结构切开为单根的梁, 使其形心恰好处于上部结构的主轴计算梁格的截面特性, 是不合适的。因此, 如图5.21b所示, 假设把上部结构从两腹板间的中央切开, 内部“结构”构件3、4的形心实际上是与上部结构主轴相重合的。边部“结构”构件2的形心则处在较高的水平线上, 但是和其它构件一样, 它的梁格惯性矩是按绕上部结构主轴来计算的。

### 5.5.3 具有斜边腹板的格式上部构造梁格

图5.22为具有斜的边腹板多跨四格室并在支点处加腋的上部结构细节图。这种情况把上部结构再切开成为形心在上部结构主轴上的纵向构件是不实际的。因此, 想像上部结构分割为五根“结构”构件, 其惯性矩则按绕上部结构主轴计算, 如图5.22a所示。不增“虚拟”边构件, 以期在梁格尺寸上经济合理。

对于非矩形格室, 如何估算切割出的梁格抗扭刚度的等效值是没有把握的, 然而, 若用式5.6以 $h$ 等于格室的平均高度, 则得到合理的结果。因此,

$$C_1 = C_s = \frac{3.6}{2} \times \frac{2 \times 0.5^2 \times 0.225 \times 0.25}{(0.225 + 0.25)} = 0.1m^4$$

$$C_2 = C_4 = 0.9 \times \frac{2 \times 1.35^2 \times 0.225 \times 0.25}{(0.225 + 0.25)} + 2.7$$

$$\times \frac{2 \times 1.7^2 \times 0.225 \times 0.175}{(0.225 + 0.175)} = 1.9m^4$$

$$C_3 = 3.6 \times \frac{2 \times 1.7^2 \times 0.225 \times 0.175}{(0.225 + 0.175)} = 2.0m^4$$

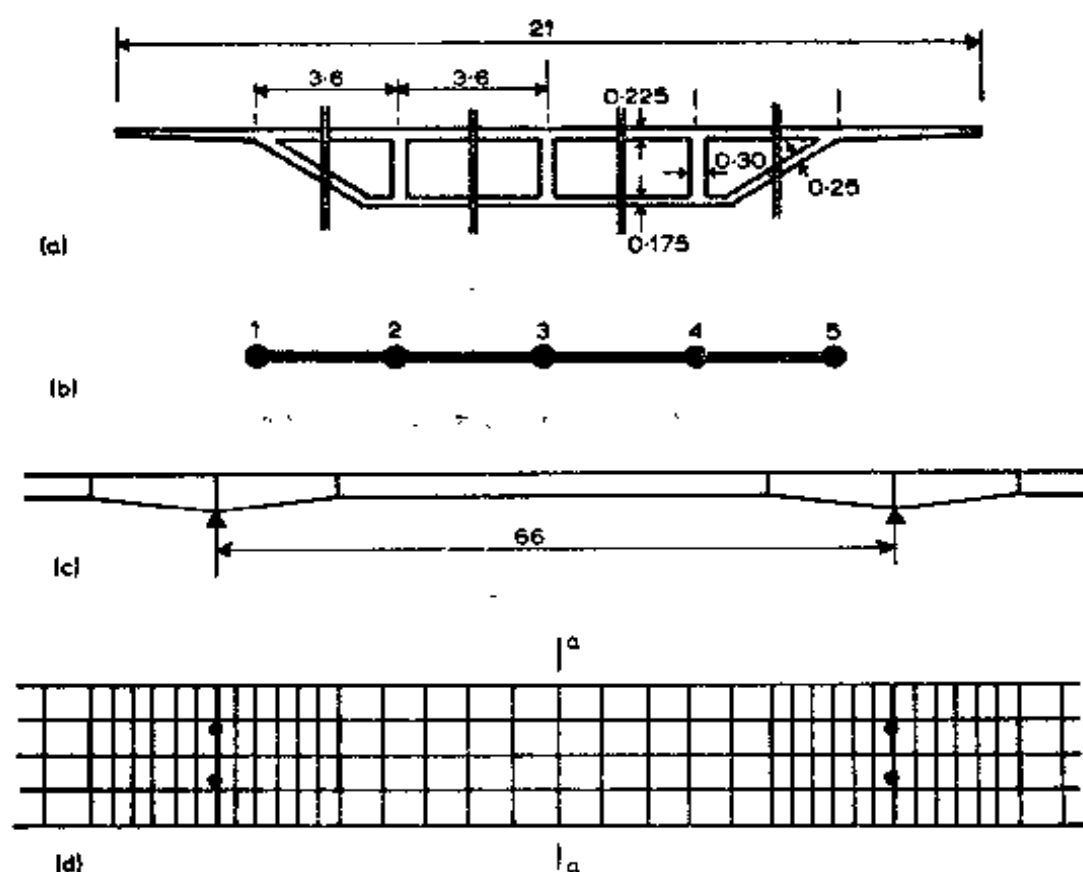


图5.22 具有加腋和斜腹板的多跨上部结构梁格部分  
(a)上部结构截面；(b)梁格截面；(c)上部结构纵向截面；(d)梁格网格

纵向构件的剪切面积应按工程观点来判断，对于构件2、3和4，剪切面积可采用腹板面积。对于构件1和5有几分是任意的，为了偏于安全，建议作以下计算：

$$A_{s1} = A_{s5} = 0.9 \times 0.25 = 0.21m^2$$

$$A_{s2} = A_{s3} = A_{s4} = 1.7 \times 0.3 = 0.51m^2$$

横向梁格也应要求特别的考虑和判断有关横截面的几何特性。一般来说，建议用式5.4和5.5以全部格室的平均  $h$  值来计算惯性矩和抗扭常数，剪切面积则按第5.4.4节所述的平面构架来分析。因此，在图5.26a所示横截面分析中，得到下列数值

$$\begin{array}{ll} \text{边格室} & A_{s12} = 0.05 m^2 m^{-1} \\ \text{内格室} & A_{s23} = 0.005 m^2 m^{-1} \end{array}$$

## 5.6 荷 载 作 用

多格式和箱形梁上部结构的腹板间距是远大于行车宽度的。因此，整个行车荷载可以布置在梁格构件之间，这些荷载作用在梁格节点的每一侧，可以按静力分布计算，由于上部结构具有很大的横向弯曲刚度和纵向的抗扭刚度，在这些静力分布荷载作用下，可以正确的说，它的性能实际上恰似把荷载作为固定边缘剪力和弯矩作用在顶板的边缘一样。这与第4.6节所述的稀排梁板式上部结构性能大不相同，因为该节提到，在横向弯曲刚度和纵向抗扭刚度较小的梁板式上部结构中，当荷载置于主梁之间并且按静力分布到梁上时，梁板式上部结构是以各不相同的状态挠曲的。

如同梁板式上部结构一样，分格式上部结构的梁格仅给出由于结构作为整体变形在上部结构内产生力系，而没有指明在梁格构件之间由于荷载集中引起的局部弯矩和剪力。这些弯矩和剪力必须分别利用第4.6节所叙的梁板式上部结构的泼吉尔 (Pucher) 图表算出，并且加到由荷载分布到梁格中所算出的数值中去。

## 5.7 输出数据整理

分格式上部结构的梁格输出数据，必须像截面特性计算那样十分仔细地整理；格室内有关力的有价值的详细数据，都可以重新应用分格式上部结构与梁格中力的局部静力等效原理从梁格推导出来。

下列的讨论是用应力表明图5.20中从上部结构梁格分析的计算实例。荷载情况则为在主跨径的一侧布置有列车荷载和人行道荷载。

### 5.7.1 纵向弯曲

如图5.23为三根“结构”纵向梁格的弯矩图。图中看到在节点处弯矩成锯齿形的突变（如图5.23所示），这是因为在每一节点处横向构件的扭转变换到纵向构件的弯矩和剪力的结果（见图5.11）。“真正”弯矩图可假定取通过每一节点两侧的弯曲应力平均值，如图5.23中虚线所示。在某一断面纵向弯曲应力，可从这些“真正”弯矩中利用梁格代表的

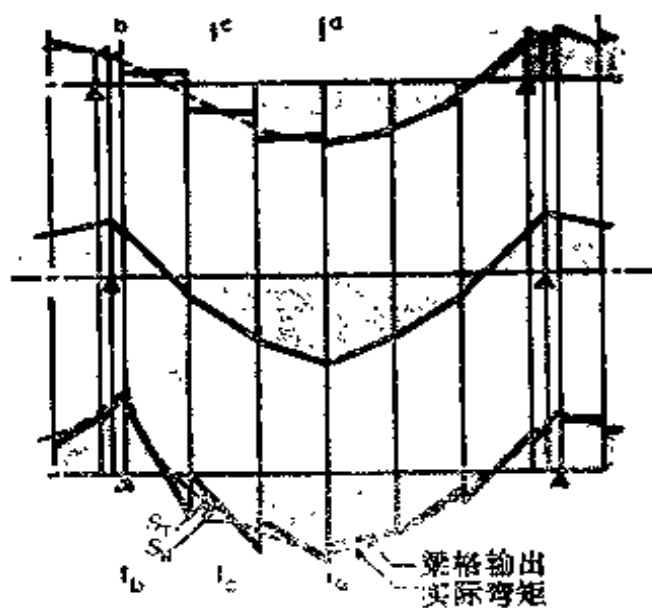


图5.23 梁格部分的纵向弯矩

工字梁截面特性来计算。图5.24a和b表示用这种方法所算得的上部结构截面a-a和b-b的弯曲应力。每根工字梁的弯曲应力为一常数，在工字梁之间假想的切割处，不可能存在应力突变，也没有对剪力滞后按第八章中所述的方法修正。

由弯曲产生的剪力  $S_M$  是图5.23中“真正”虚线弯矩图的斜率，在“工字梁”腹板内和翼缘内的剪力流则用式5.2从  $S_M$  计算出来。图2.25则表示在横截面c-c处的这些弯曲剪力流。

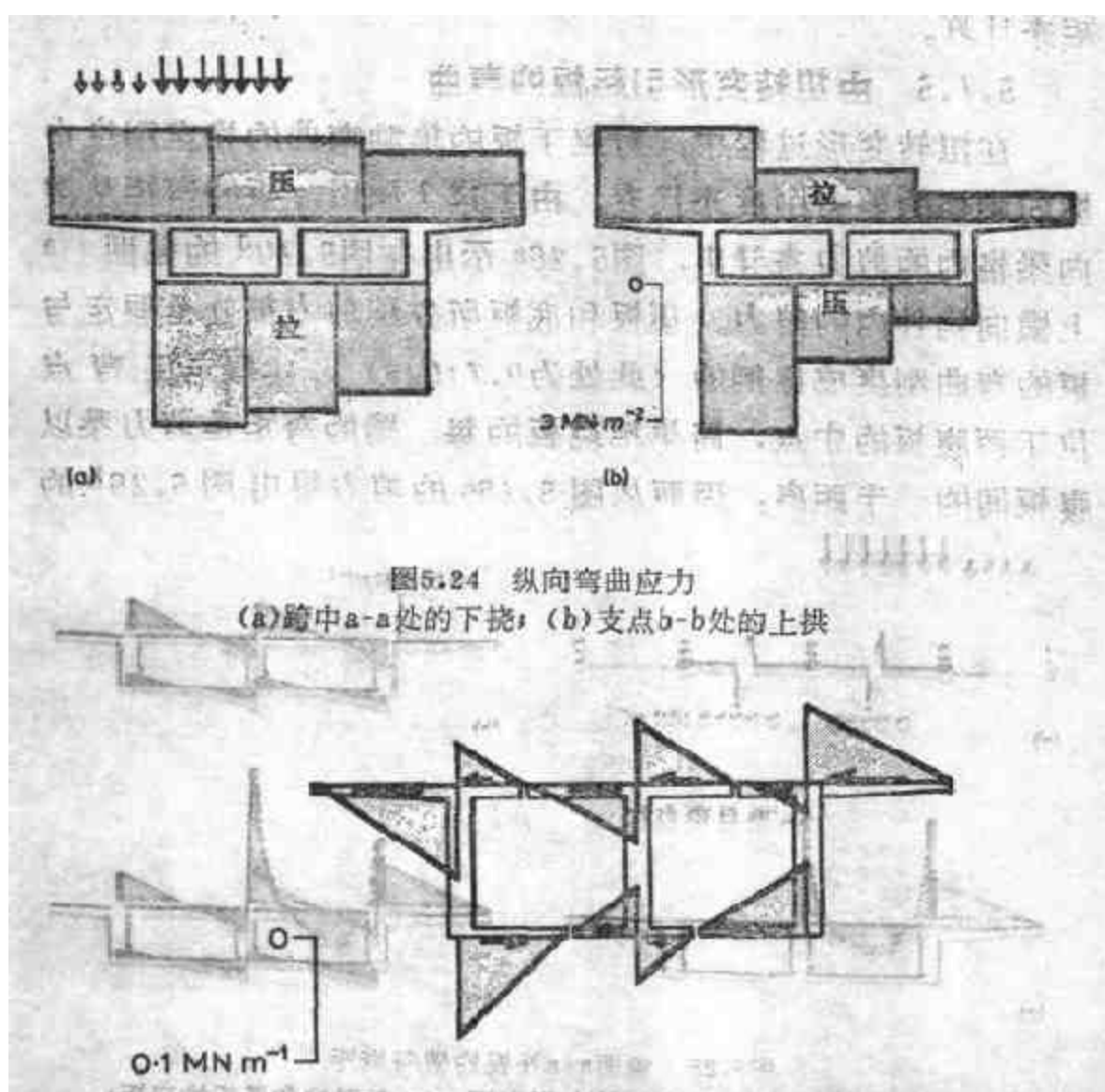


图5.25 截面c-c处纵向弯曲剪力流

### 5.7.2 横向弯曲

梁格内的横向弯矩，是和没有扭转变形的顶板中的横向受压及底板受拉（反之亦然）的反向值等效的。在窄的上部结构中，通常与纵向弯矩（横隔板处除外）相比它是十分微小的，然而，在宽的上部结构中却可能是很大的，尤其是接近斜交点处更甚。因为这些弯矩受纵向梁格的格件的影响，和纵向弯矩图一样，梁格输出的横向弯矩图亦为锯齿形的。按相似的办法，顶板和底板应力均应取每节点两侧的平均弯矩来计算。

### 5.7.3 由扭转变形引起板的弯曲

在扭转变形过程中，对应于板的单独弯曲的格室刚度由横向梁格的剪力刚度来代表。由于这个原因，板的弯矩从横向梁格内的剪力来导出，图5.26a 示出在图5.20d 的截面a-a上横向构件内的剪力。顶板和底板所分配剪力部分是假定与板的弯曲刚度成比例的（此处为0.7:0.3），还假定反弯点位于两腹板的中点，简单地说板的每一端的弯矩是剪力乘以腹板间的一半距离，因而从图5.26a 的剪力得出图5.26b 的

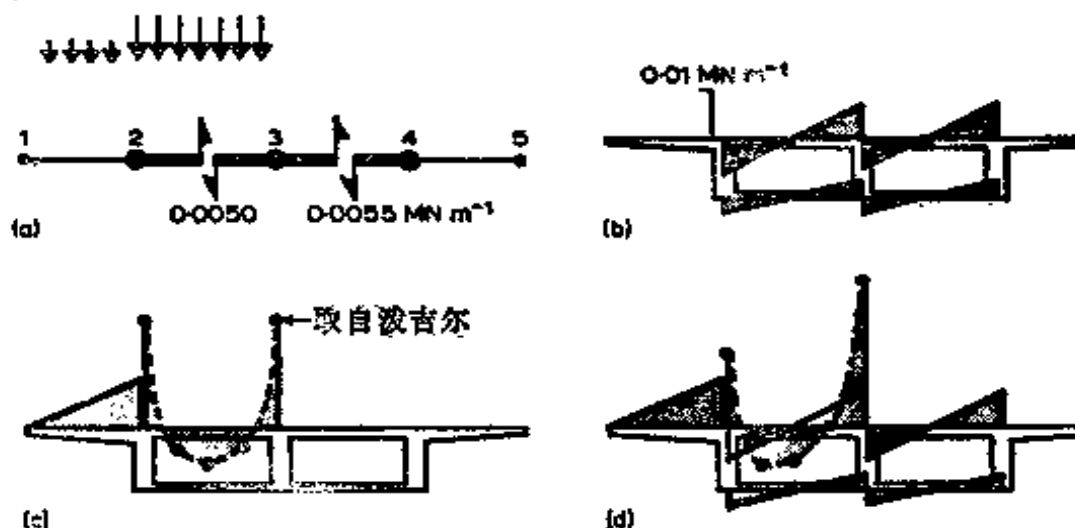


图5.26 截面a-a处板的横向弯矩

(a)梁格横向剪力；(b)格室扭转变形弯矩；(c)悬臂的和局部的弯矩；  
(d)总弯矩

横向弯矩图。在悬臂处横向板弯矩可以直接取自梁格输出数据，因为这些构件并不代表一个格室。图 5.26c 表示 a-a 截面在线荷载作用下的悬臂弯矩和局部弯矩，而图 5.26d 表示图 5.26b 加 c 所得的总弯矩。局部弯矩则用第 4.6 节所述的泼吉尔 (Pucher) [2] 影响图表计算的。

#### 5.7.4 扭转剪力流

如第 5.4.4 节所述板内扭转剪力流必须从横向和纵向梁格每单位宽度的平均扭矩来计算，图 5.27a 表示格室每单位宽度在梁格内的扭矩及两个方向上的平均值。用板的中面间的距离  $h$  来除这些格室每单位宽度的平均扭矩，则得出板内

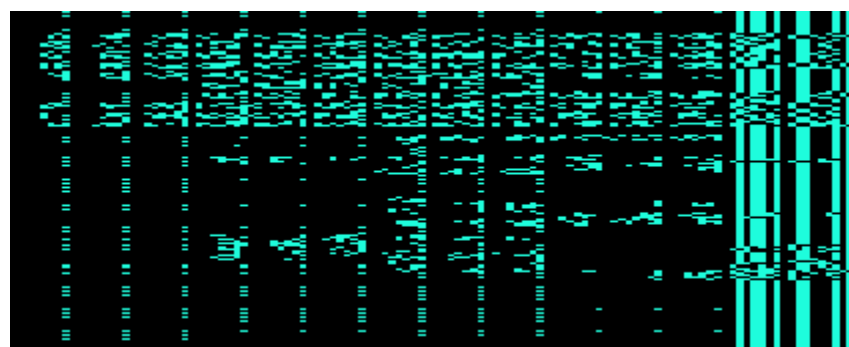
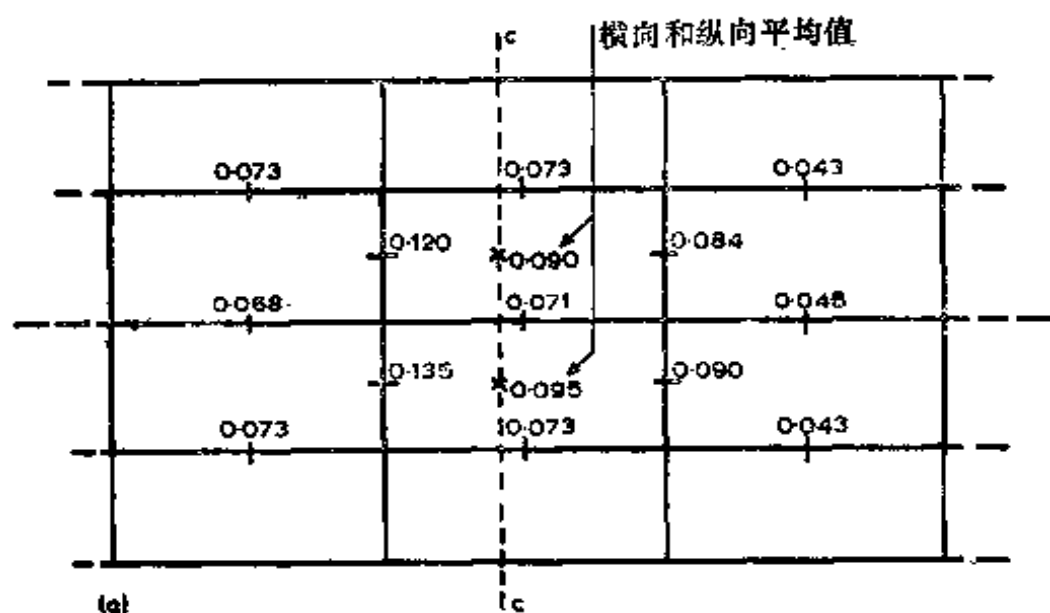


图 5.27 用梁格横向和纵向扭矩输出的平均值计算出的 c-c 截面扭转剪力流

(a) 梁格构件内每单位宽度的扭矩；(b) 剪力流



剪力流（如图5.27b所示）。把这些加上图5.25的弯曲剪力流，则得出如图5.28的总剪力流。

梁格纵向构件的剪力输出数据是图5.28锯齿形的输出弯矩图的斜率。这些剪力把由于弯曲（虚线的“真正”弯矩图的斜率）的分量  $S_M$  和由于扭转（由横向扭转引起的锯齿形的附加斜率）的分量  $S_T$  组合一起。因此梁格输出剪力代表上部结构每块腹板的总剪力。

由于纵向构件内扭转剪力  $S_T$  是从横向构件内的扭矩平衡得出的，若横向扭矩明显地与两个方向上扭矩的平均值有差别，则有误差。尽管不太需要，但对扭转剪力可以作出修正，即按相应于横向扭矩的超出值与整个平均扭矩成比例来增减剪力的数值。

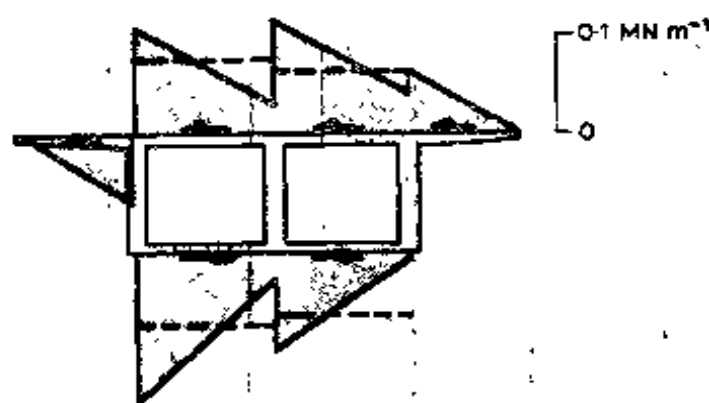


图5.28 由扭转和弯曲所组合的剪力流

## 5.8 其他分析方法

剪力—柔性梁格对分格式上部结构虽然是一个最方便的分析方法，但它不是唯一的有效方法。因此，值得提供某些适应特殊情况的其他方法，麦西尔 (Maisel) [3] 对常用的方法作了一个综合评述。

在窄的正交的上部结构（箱宽小于1/10有效跨径的）

中,“连续梁方法分析法”(第2章内所述)是研究弯矩、扭转等的最简便的方法,在结合梁格法分析与桥墩垂直的宽桥面多跨高架桥时,它也非常有用。即用连续梁法研究横截面上由于恒载、施工工序、预应力和各种跨长的活载分布引起的沿跨度总弯矩的分布,而梁格法则用于三个或四个典型跨度来决定横贯上部结构的弯矩分布,以及研究列车荷载的不同横向分布的影响。有时用弹性基础梁比拟法〔4〕代替梁格分析的方法,但是这个方法既不方便也不如梁格法用处广泛。

除梁格法外,对复杂的或独特的构造的分格式上部结构。一般要求用某些分析方法以研究板的单元性能与靠近横隔板的应力集中。具有等截面(从一端到另一端的截面相同)、与桥墩垂直的以及有少数横隔板的上部结构,通常可用褶皱板法和有限条法来分析,见第十二章和十三章所述。若上部结构具有变截面或斜交支点或许多横隔板,用空间构架分析也并不复杂。构架构件可以布置成方格桁架或十字形网格,可参阅第七章。相当复杂的上部结构通常要求用第十三章所述有限单元法来分析。由于这个方法的复杂性和费时,所以往往用梁格法来作荷载分布及施工程序的近似分析,这样比较方便和经济,然后再用有限元法去研究局部区域承受临界的和复合的应力。

### 参考文献

1.Sawko, F.(1968), "Recent developments in the analysis of steel bridges using electronic computers," BCSA Conference on Steel Bridges, London, PP.39-48。

2.Pucher, A.(1964), Influence Surfaces of Elastic Plates, Springer Verlag Wien and New York.

3.Maisel, B.I.(1970), "Review of literature related to the analysis and design of thin walled beams," Tech-

nical Report 42.440, cement and concrete Association,  
London, July.

4. Wright, R.N., Abdel-Samad, S.R. and Robinson,  
A.R., (1968), 'BEF for analysis of box girders,' Journal  
of the Structural Division of the A.S.C.E., 94ST7,  
1719-1743.

## 第六章 剪力铰桥面

### 6.1 引言

如图6.1所示，剪力铰桥面上部结构，是由许多平行密排的梁沿它的长度用横向弯曲刚度很小的节缝把它们彼此相互连接而成的。在剪力铰桥面上部结构与第四章所述的梁板式上部结构之间没有本质的区别，但剪力铰桥面上部结构的特殊构造与刚度赋予它以特别的性能。在梁格计算机方法发展以前，一般来说，这种上部结构采用史宾特尔 (Spindel) [1] 所推导的“以节缝作联接的板的理论”来分析，这个理论是以参考文献[2]的荷载分布系数图表为基础的。然而，目前最方便的方法是在第三章和第四章中所讨论的梁格的一种特殊应用。这一章描述剪力铰桥面上部结构的特性和用梁格来模拟的细节。

### 6.2 结构性能

梁与梁间的纵向连接可以考虑作为全长的“钢琴”键。如图6.2所示，当上部结构受载时，荷载的一部分从下面的梁传走，而另一部分则通过铰的垂直剪力横向传递到邻近的梁上。与第四章的梁板式上部结构不同，这种横向剪切主要由梁的抗扭刚度来抵抗，而只有很小部分由铰接结构的横向弯曲刚度来抵抗（若节缝为真正的铰接，则这部分为零）。

如图6.3所示，作用于梁单元上的力，与图4.3的梁板式上部结构相似。因而，平衡方程式与式4.1相同。

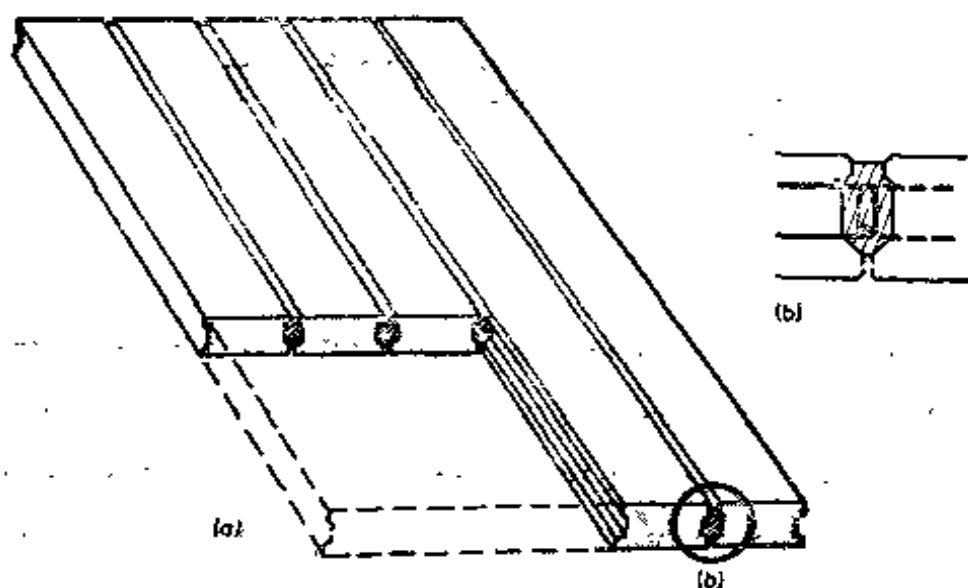


图6.1 剪力铰桥面上部结构

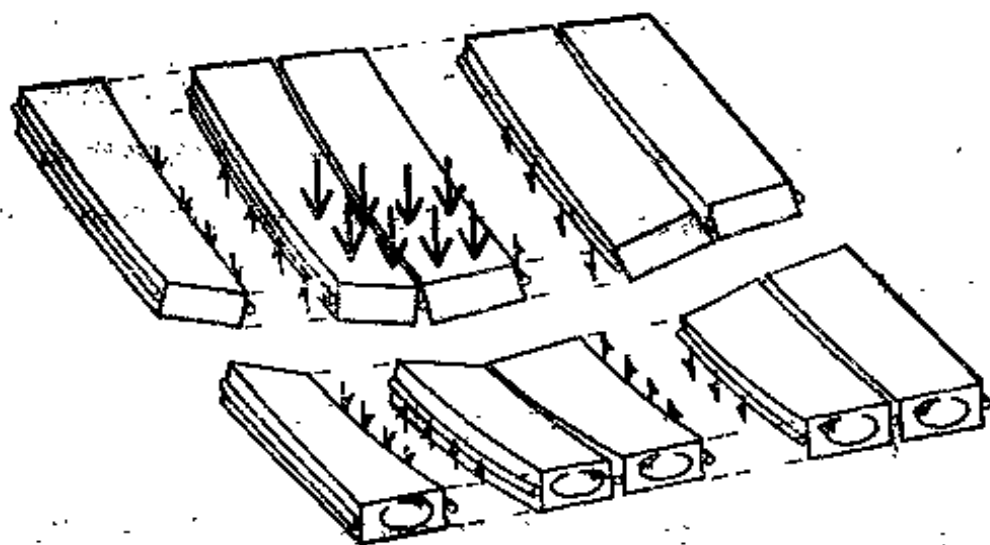


图6.2 由梁的扭转所抵抗的垂直剪力的横向荷载分配

$$-\frac{dS_x}{dx} + \Delta s_y = -W \Delta y$$

$$-\frac{dM_x}{dx} = S_x$$

(4.1)

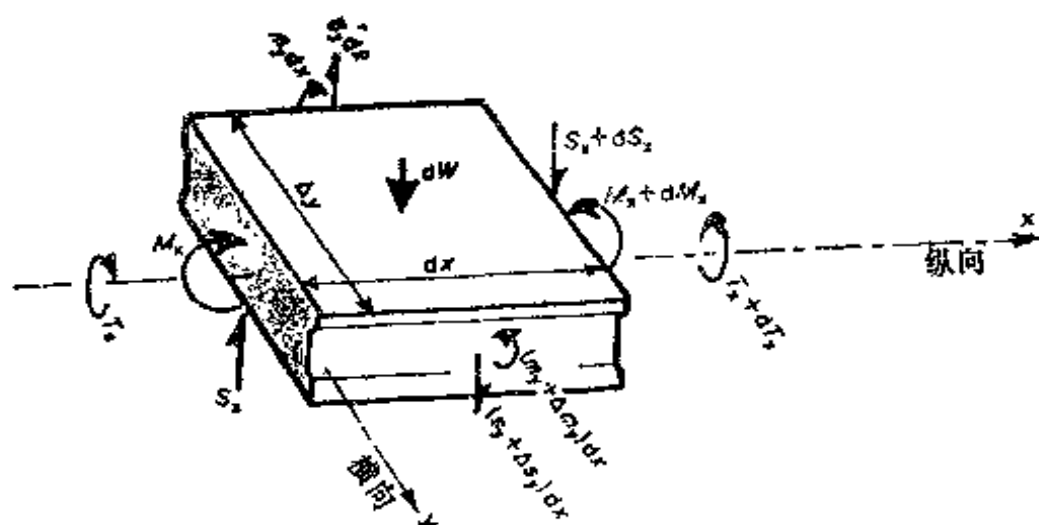


图6.3 剪力铰桥面上部结构的梁单元

$$\Delta m_y + \frac{dT_x}{dx} = s_y \Delta_v$$

当节缝的弯曲刚度略去时，第三个方程式变为

$$-\frac{dT_x}{dx} = s_y \Delta_v \quad (6.1)$$

若节缝真实地如同自由铰一样工作，则在点荷载作用下可以预料的挠度曲线会有一尖点，如图6.4a所示。在尖端两侧上，梁的相对转动很大，因而桥面预期会遭到压溃损坏。在实用上，使节缝的弯曲刚度不完全丧失，则上部结构的性能就明显地得到改善。在参考文献〔3〕中作了最好的说明，即在剪力铰中用比较少量的钢筋，梁的相对转动就大大地减少到按柔性铰预估值的范围之下，如图6.4b所示。

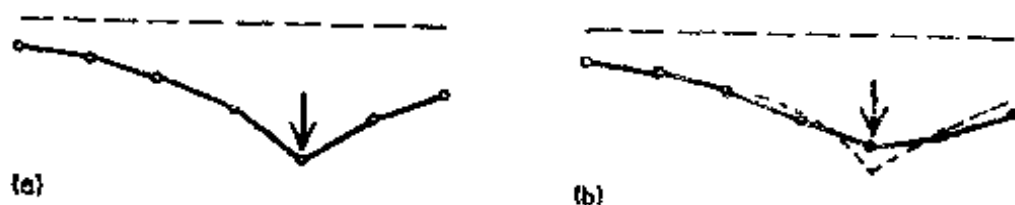


图6.4 承受点或线荷载的剪力铰桥面上部结构跨间挠度  
(a)自由节缝；(b)部分刚性节缝

在实用上因为某些节缝构造的弯曲刚度是难以估算的，所以通常为了设计目的而作出节点是柔性的假定是合理的。对于受极大扭转的梁，这估算结果是保守的。不管怎样，除非上部结构由于某种原因建造真正的铰，则所被忽略的节缝刚度将使损害性的横向压溃应变不致在桥面发生。

剪力铰桥面上部结构，可以像第8.3节所述的板一样，在边缘上用上伸式梁来加劲。若板宽考虑作为上伸式梁的翼缘，则需要作出剪力铰能够传递纵向剪力流到翼缘的校核。

## 6.3 梁 格 分 析

### 6.3.1 梁格结构

一个剪力铰桥面上部结构如图6.5a所示，可以由（图6.5b）的梁格来代表，它有与原型梁中心线相重合的纵向构件。每一纵向梁格有刚性的横向悬臂梁，剪力铰由在相邻梁的悬臂梁之间的铰节点来代表。

若剪力铰有弯曲刚度（若计算机程序不能适应铰节点），则悬臂梁可以由短的柔性构件联接，而全部节点则为刚性如图6.5c所示。柔性联接的长度和刚度需要尽可能正确地模拟剪力铰的尺寸和刚度。例如，对于剪力铰可能简单地由外伸的短钢筋构成；在这个情形中，短的柔性梁格要表示出短钢筋的有效长度和刚度。若梁格刚度在数值上相差悬殊，可能遇到的缺点就是计算机不可能以有效位数的数字来计算。因此位移方程的解答可能是不正确的或不可能的，所以计算前应预先检查计算机要有足够精度。

若图6.5b和c的梁格有大量的构件，其结果是计算机数据和输出值不易处理。构件的数目可以从两个途径来减缩。首先如图6.5d所示，刚度不同的横向构件链可以用等效刚

度的单根构件来代替，留在后面再解释。其次如图 6.5 e 所示，两根或多根的上部结构梁可以由各纵向梁格来代表。在列车荷载下，如果不严重的影响所计算的弯矩的最大峰值，梁格的横向间隔可以设置成最大达  $\frac{1}{5}$  跨径，这种权宜的办法会使分析的精度降低；但若小心处理，其结果是差别不大的，这样减少了运算上的误差。况且，当全部分析近似值与已建成的结构作比较时，要说明哪一种分析最符合实际往往是困难的。

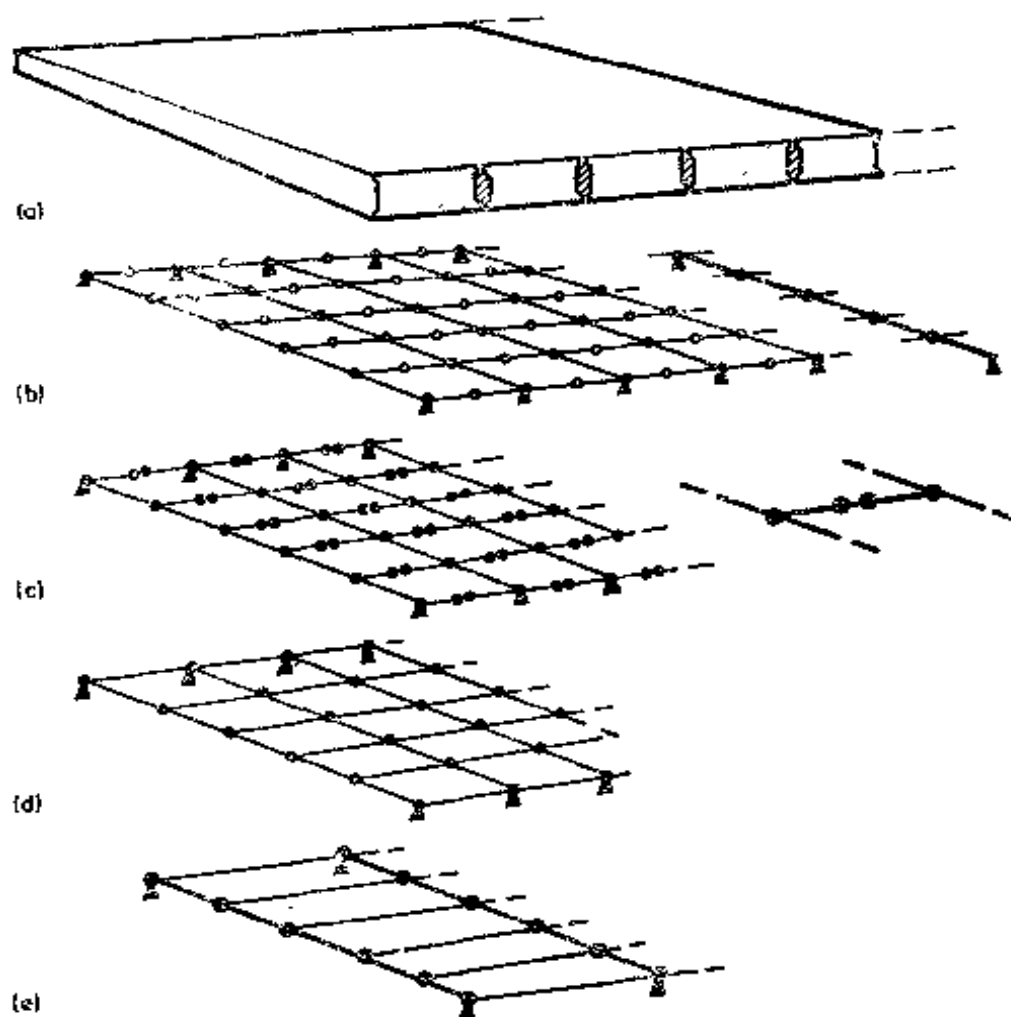


图6.5 剪力铰桥面上部结构的梁格表达形式



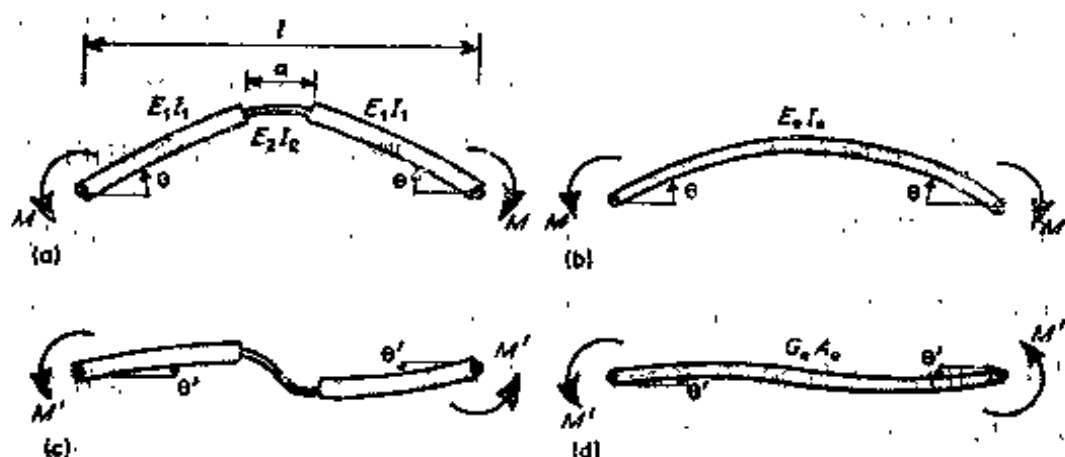


图6.6 用等效均匀的梁格构件表达具有不同惯性矩的链杆  
(a, b)表示对称弯曲; (c, d)表示反对称弯曲

图6.6a中刚度不同的横向构件链杆在对称弯曲下, 具有与图6.6b相同刚度的等效构件, 若

$$\frac{M}{\theta} = \frac{2}{\int \frac{dx}{EI}} = \frac{2}{\frac{l-a}{E_1 I_1} + \frac{a}{E_2 I_2}} = \frac{2}{\frac{l}{E_c I_c}} \quad (6.2)$$

式中  $E_1 I_1$ ,  $E_2 I_2$  为刚度不同的原型梁段的弯曲刚度, 而  $E_c I_c$  为等效梁格的弯曲刚度。

在图6.6c的反对称弯曲下, 如果不考虑等效构件的剪切柔度, 图6.6d的等效构件将有一个不同于式6.2所给出的等效刚度。对于图6.6c中惯性矩不同的梁, 其刚度由下式得出:

$$\frac{M'}{\theta'} = \frac{l^3}{2I_0} \quad (6.3)$$

$$I_0 = \int \frac{x^2 dx}{EI} = \frac{dx}{EI} \quad \begin{array}{l} \text{单元绕其形心的二次面积} \\ \text{力矩} \end{array}$$

$$I_0 = \frac{(l^3 - a^3)}{12E_1 I_1} + \frac{a^3}{12E_2 I_2}$$

需要指出：这些方程式所假定不同惯性矩的梁系对 midpoint 作对称布置。

对于图6.6d 的等效剪力柔性梁，其刚度为：

$$\frac{M'}{\theta'} = \frac{l^2}{2 \left( \frac{l^3}{12E_c I_c} + \frac{l}{G_c A_c} \right)} \quad (6.4)$$

式中：\$A\_c G\_c\$ 为等效梁格的剪切刚度。

因而，由等效关系得：

$$\frac{l^2}{2 \left( \frac{l^3 - a^3}{12E_1 I_1} + \frac{a^3}{12E_2 I_2} \right)} = \frac{l^2}{2 \left( \frac{l^3}{12E_c I_c} + \frac{l}{G_c A_c} \right)} \quad (6.5)$$

因此从式6.2和6.5得出等效构件的截面特性：

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_c} &= \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \frac{E_c}{E_1 I_1} + \frac{a}{l} \frac{E_c}{E_2 I_2} \\ \frac{1}{A_c} &= \left[ \left( 1 - \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{1}{E_1 I_1} + \frac{a^3}{l^3} \frac{1}{E_2 I_2} + \frac{1}{E_c I_c} \right] \\ &\quad \frac{l^2 G_c}{12} \end{aligned} \quad (6.6)$$

由此得到 \$A\_c\$ 的值是负的。

当剪力铰实际上象是铰接那样小的弯曲刚度时，则对上述等式是一种例外。在这种情况下，式6.6是不定式，则实际的铰节点必须引入到梁格构件中。

剪力铰桥面上部结构可以建造成为薄壁箱型梁，它的横截面在横向剪力作用下发生扭转变形。这种扭转变形由如第5.4.4节所叙述的分格式上部结构，适当的修正横向构件的等效剪切面积后，可以计入在梁格分析内。确定复杂截面等效剪切面积的最简单方法，是相似于图5.15所表示的分

格式上部结构的横截面进行平面构架的计算机分析。

对于剪力铰桥面上部结构理论和图表，它还可以用于如图 4.1 中的稀排箱梁与板式上部结构的分析。箱子的抗扭刚度要做成有这样的性能，即使得它们在工作状态下与具有类似一个相当柔性的剪力铰的薄板的剪力铰梁相似。

### 6.3.2 截面特性例题

图 6.7a 示出由图 6.5e 中所代表的每根纵向梁格的横截面。纵向构件的惯性矩等于它所代表的梁的惯性矩总和。这里为：

$$I_x = 2 \times \frac{0.902 \times 0.381^3}{12} = 0.0083$$

因为节缝没有提供从一根梁到另一根梁有剪力流的连续性，剪力流在每根梁中自行构成封闭圈（如图 6.8 所示）。这扭转性能等于第 2.4.3 节所给出的独立梁的抗扭常数。梁格构件的抗扭常数简单地是所组成梁的圣维南 (Saint-Venant) 抗扭常数的总和。这里为：

$$C_x = 2 \times \frac{3 \times 0.902^3 \times 0.381^3}{10(0.902^2 + 0.381^2)} = 0.025$$

应该注意这抗扭性能总的不同于图 3.1d 的正交异性板式上部结构，那里在梁与梁间横向预应力使得扭转剪力流能够彼此相互影响。因而如同图 3.5 所示在总横截面上的扭转剪力流环绕整个截面流动。

横向梁格必须等效于图 6.7b 变化的横截面。节点的惯性矩在下挠弯矩作用下按已换算的钢筋混凝土开裂的截面来计算，底部横向钢筋作为受拉钢筋来考虑。在每一侧梁的惯性矩按未开裂的混凝土来计算，略去钢筋不计。利用式 6.6，每单位长度的特性：

$$E_2 = 0.8E_1, E_c = E_1, G_c = 0.43E_1$$

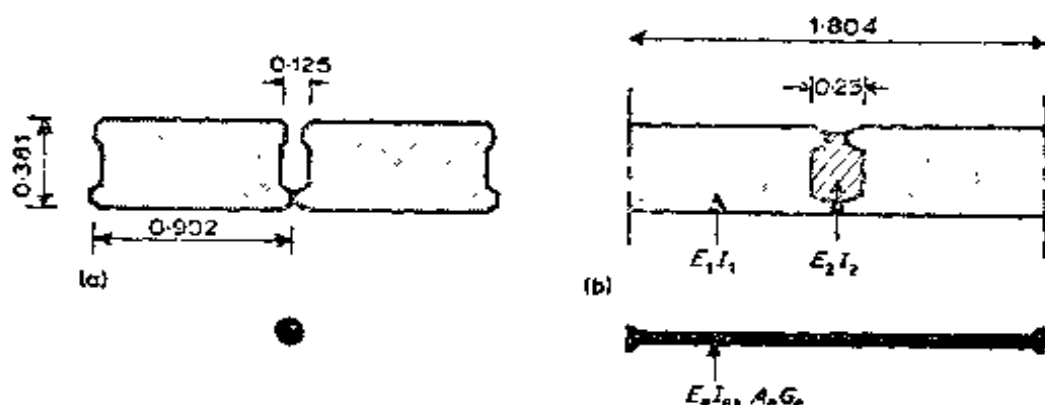


图6.7 图6.5e中梁格连接部分  
(a)纵向构件截面；(b)横向构件截面

$$l = 1.804, a = 0.25$$

$$i_1 = -\frac{0.381^3}{12} = 4.6 \times 10^{-3} \quad i_2 = 4.1 \times 10^{-4}$$

$$i_c = 1 / \left( -\frac{0.86}{4.6 \times 10^{-3}} + \frac{0.14}{0.8 \times 4.1 \times 10^{-4}} \right) \\ = 1.65 \times 10^{-3}$$

$$u_c = 1 / \left( -\frac{0.997}{4.6 \times 10^{-3}} + \frac{0.0027}{0.8 \times 4.1 \times 10^{-4}} - \frac{1}{1.65 \times 10^{-3}} \right) \times \frac{1.804^2 \times 0.43}{12} = -0.022$$

节点的很小的横向抗扭刚度以及虚拟的抗扭常数可以归入横向梁格之中，另一方面，在计算节点惯性矩时  $c = |d^3/6|$  可供计算受压混凝土高度为  $d$  的板，即

$$c = \frac{0.053^3}{6} = 2.5 \times 10^{-5}$$



图6.8 剪力铰桥面上部结构梁内的扭转剪力流

## 6.4 斜交式上部结构

剪力铰桥面上部结构可以建造成很大斜交角的,其荷载分布与直交式上部结构有差别。在纵向弯矩相差较小,而梁的扭矩差别相当大。若剪力铰只有很小的或没有横向弯曲刚度,则梁的抗扭强度将大于可能给出的设计强度。因此,在分析中有必要对剪力铰规定某些弯矩刚度,而且,还要对这项刚度作出实际的估算。

斜交式剪力铰桥面上部结构的支座,如同其他类型的斜交式上部结构一样,也不需要刚性的。这种刚度不仅使梁的扭转增加,而且将导致在某些支座内承受很大的反力,在靠近锐角隅处的其他支座将出现翘高,另外若原型的支座是十分刚性的,则反力和梁端剪力的分布是难以估算的〔2〕,它随着节点刚度局部变化有一个明显的影响。反之,若支座是软的,反力的分布是较均匀和可估算的。

### 参考文献

1. Spindel, J.E.(1961), 'A Study of bridge Slabs having no transverse flexural stiffness', PhD Thesis, Kings College, London.

2. Department of Environment(1970), 'Ministry of transport Technical Memorandum Shear Key Decks', Annexe to Technical Memorandum(Bridges)No.BE23.

3. Best, B.C.(1963), 'Tests of a prestressed concrete bridge incorporating transverse mild-steel shear connectors', Cement and Concrete Association, Research Report16.

## 第七章 三维空间构架分析和板的薄膜作用

### 7.1 板的薄膜作用

在第4.8节中曾讲过普通的平面梁格，在梁板式上部结构的纵向梁之间，不产生跨板条平面内的剪力传递。图7.1a示出这样的沿边缘承受有平面内剪力流 $\tau_{12}$ 和 $\tau_{21}$ 的一块板条。这些剪力流可以划分为图7.1b中的对称剪力流和图7.1c中的反对称剪力流。普通的梁格分析考虑到两对分的板条作为T梁的翼缘，对其每一边模拟有图7.1b型的剪力流。图7.1c中反对称于内梁的剪力流则略去。

图7.1c的反对称剪力流，根据它们沿边缘是否同时产生横向压力的情形，可以产生两种类型平面内变形。图7.2a示出一块承受反对称剪力流而无横向力的窄板条，而板条在平面内弯曲形成幅射式扇形横截面。反之，图7.2b示出一块薄板条，它由剪切变形使在平面内产生扭转变形而横截面仍然保持平行，并且该矩形单元受剪切而成为平行四边形。一块独立的窄板条在受剪上比在受弯上刚性得多，因此，在反对称荷载作用下，若板条代表如图7.3所示的狭槽型截面的背面，则边缘剪力流导致侧向弯曲（倾向拉伸边缘）。然而，如果板条由许多其他板条加强形成一宽板来抵抗侧向位移，则实际上边缘仍然保持直线而板作“梯形剪切”的扭转变形（如图7.4所示）。这是7.2a平面内弯曲和图7.2b平面内剪

切的组合。因为板条在平面内抗剪刚度远比在平面内弯曲刚度为大，控制的力和应力就伴随而产生这种与剪力有关的扭转变形。

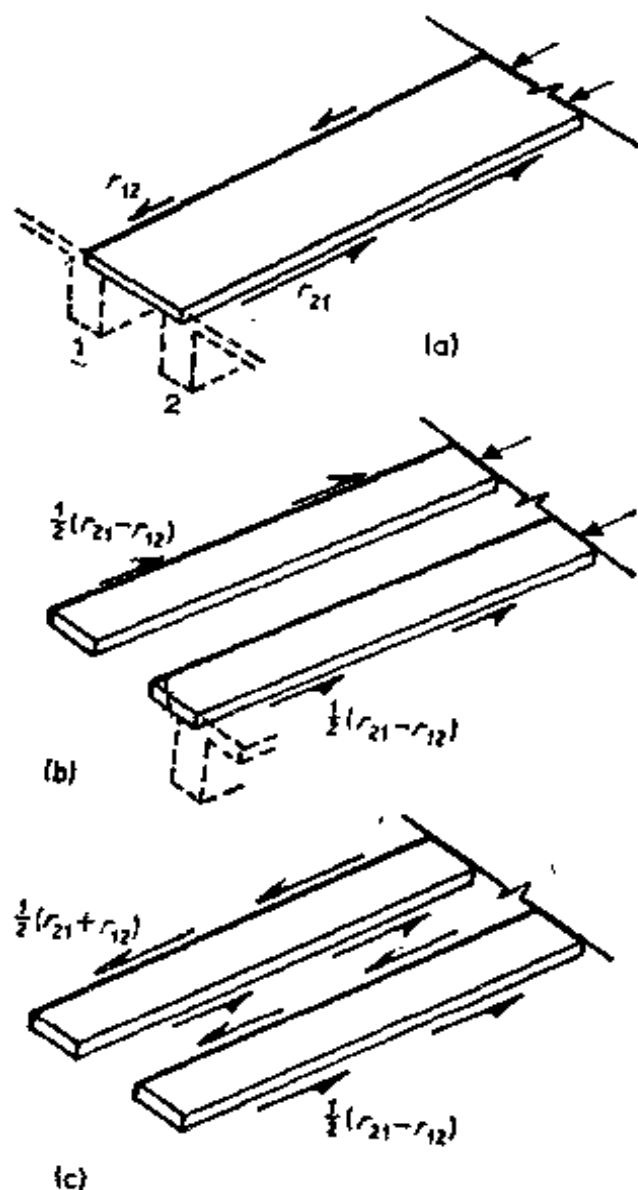


图7.1 梁板式上部结构的梁间板内的剪力流  
(a)总剪力流；(b)翼缘剪力流；(c)内梁剪力流

## 7.2 下伸式梁格

内梁板的平面内剪力可以用几种三维方法去分析，包括第十二章所叙述的褶皱理论，以及第十三章的有限元法。

目前最经济的是借助计算机办法，它对空间构架分析特别有用，这些将留在本章叙述。

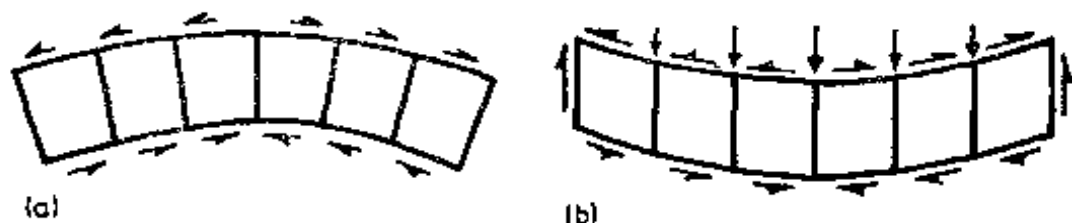


图7.2 板条平面内变形  
(a)弯曲；(b)剪切

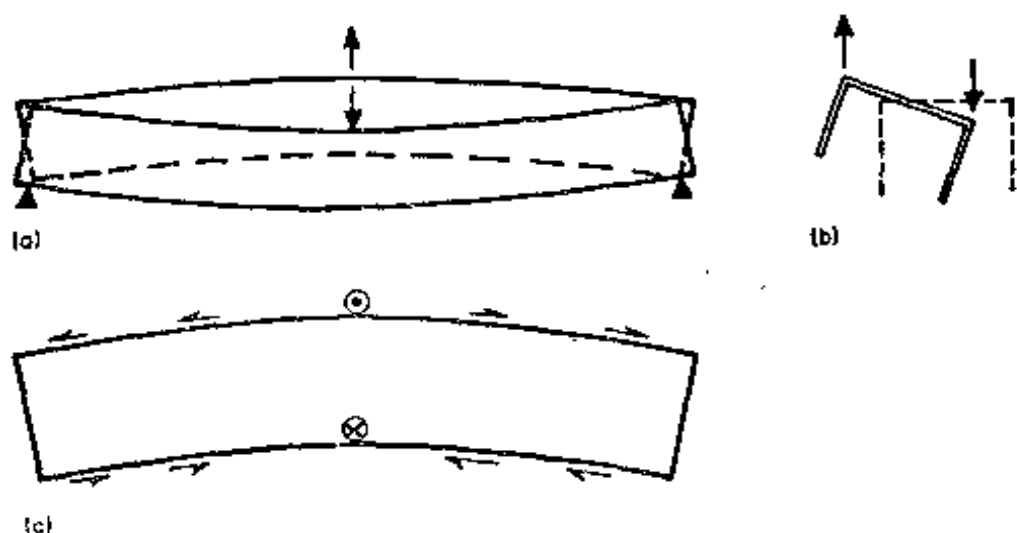


图7.3 槽型截面侧向挠曲  
(a)正面；(b)截面；(c)顶板平面

### 7.2.1 下伸式梁格

大多数的梁板式构造的公路桥梁可以视作三维结构用空间构架分析。这种分析是第四章中所述的梁格法的简单推广。如图7.5a所示的上部结构由图7.5b平面梁格来代表那样，图7.5c也可使用空间构架来代替。空间构架的网格在平面内等于梁格，但设置各种横向和纵向构件，应与它们所代表的下伸式或上伸式构件的形心线相重合。由于这个原因，这里的空间构架称之为“下伸式梁格”。纵向和横向构件用一根很



短的而且弯曲刚度很大的垂直构件加以连接。

下伸式梁格在横向和纵向扭转以及垂直平面内弯曲的作用下，与平面梁格的形式相似。因此，对于这些作用的截面的特性，按第4.5.2

节所述的相同的办法来计算。对于图7.6的上部结构则得：

$$I_x = 0.21 \quad C_x = 0.0032$$

$$I_y = \frac{4 \times 0.2^3}{12} = 0.0027 \quad C_y = \frac{4 \times 0.2^3}{6} = 0.0053$$

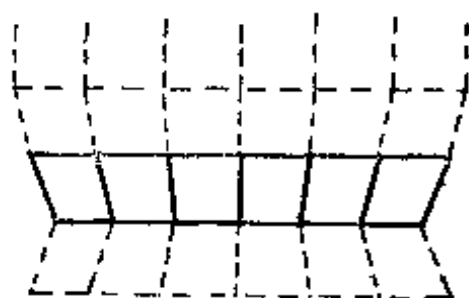


图7.4 板条的“梯形剪切”

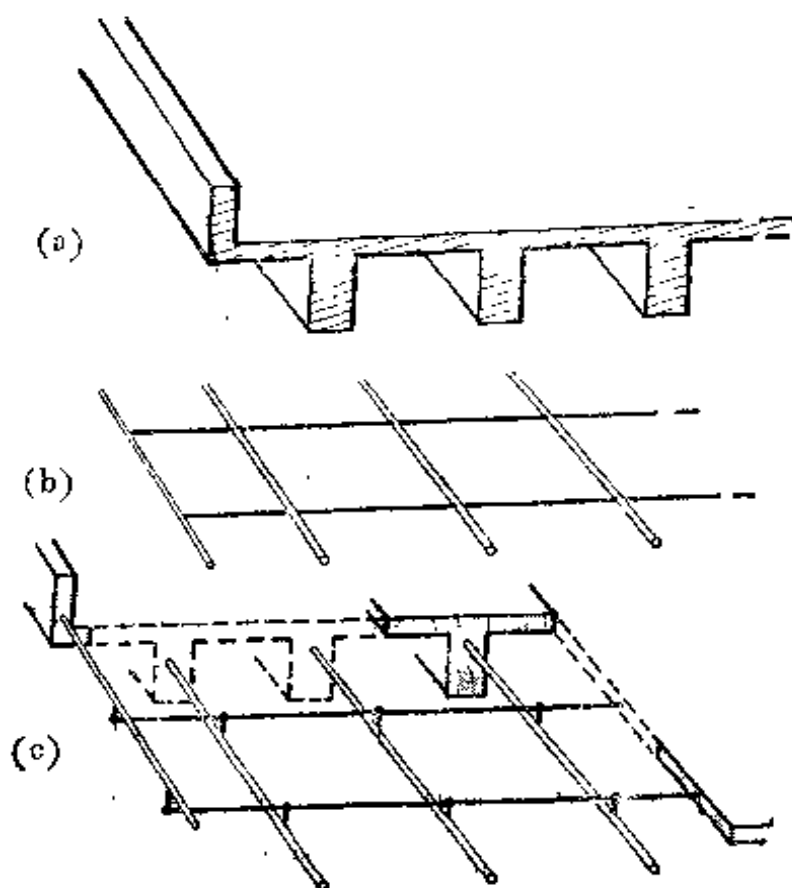


图7.5 梁板式上部结构的下伸式梁格表示形式  
(a)上部结构；(b)平面梁格；(c)下伸式梁格

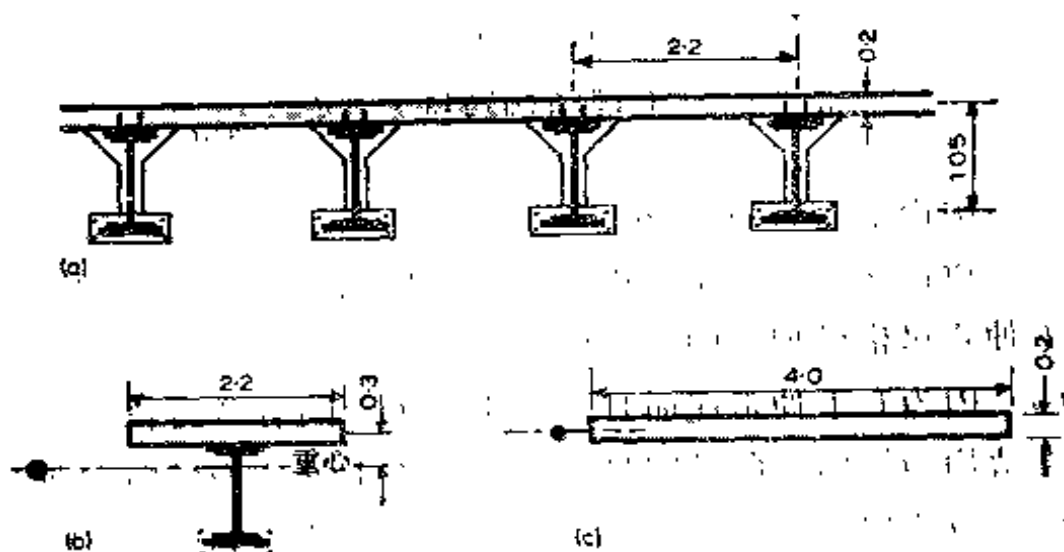


图7.6 钢与混凝土组合的上部结构尺寸图  
(a)上部结构截面; (b)纵向构件; (c)横向构件

下伸式梁的垂直挠度导致节点在板平面内作纵向移动,如图7.7a所示。若构件具有所代表的板的横截面剪切面积,并且它们受剪力作用如图7.7b所示,则这些翘曲位移在横向构件内产生平面内的剪力。如图7.7c所示,必须约束所有板的节点变形,以控制侧向位移 $v$ 和绕垂直轴的转角 $\theta$ ,以达到阻止网络的曲线型扭转变形。另外,横向构件具有平面内弯曲的相当大的惯性矩,因此剪切变形起控制作用,这样对于图7.6板内的平面内剪力和弯矩来说,则

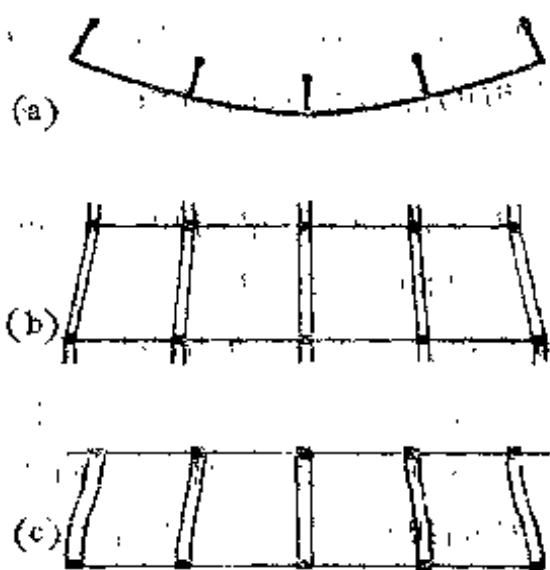


图7.7 代表板的下伸式梁格横向构件平面内剪力

- (a)由于纵向构件弯曲的翘曲位移;  
(b)横向构件平面内剪力的平面图;  
(c)横向构件不正确的平面内弯曲

$$A = bd = 4.0 \times 0.2 = 0.8$$

$$\text{设 } I = \frac{(\text{上部结构跨度})^3 \times d}{12} = 800$$

板内节点  $\nu = \theta_z = 0$

应该注意，由于板内节点抵抗横向水平位移受到约束，下伸式梁格模型对图 7.3 中的 U 型梁截面的分析是不适合的，因为它下伸很深而且总宽小于 1/3 的有效跨径。这种上部结构的横向挠曲是明显的。若对于上部结构横向弯曲有怀疑，应该使用第 7.3 节和 7.4 节所述的麦克亨利 (McHenry) 桁架或十字形构架。

由横向构件作平面内剪力的传递使纵向构件受到轴向荷载，如图 4.13b 所示。纵向构件必须在这些轴力下能够拉伸（或压缩），因而，每根构件面积是它所代表的上部结构包括翼缘板的部分横截面面积。对于图 7.6 的上部结构，钢梁用模量比  $m = 7$ 。

$$A_x = \text{纵向 T 形梁面积} = 0.09 \times 7 + 2.2 \times 0.2 = 1.27$$

若纵向梁间隔大于 1/6 有效跨径，剪力滞后会减小有效翼缘宽度，而内梁剪力的传递是微小的，为了把误差减至最小，与任一下伸式梁相联系的板宽应该限制在小于 1/12 有效跨径。这样，未考虑计入下伸式梁的翼缘的板块可考虑视为一单独的纵向梁。在它与下伸式梁纵向构件之间唯一的差别是下伸式梁的垂直构件不存在了。

在横向构件弯曲和纵向构件扭转的作用下，如图 7.8 所示纵向构件作侧向挠曲。底板翼缘贡献出梁的大部分弯曲刚度来抵抗这种侧向挠度。由于纵向构件在形心处的侧向挠曲小于底板翼缘，它是按顶板算起的相应距离的比值  $z_c/z_b$  而减小的，所以构件应该具有为底翼缘  $z_b/z_c$  倍的有效惯性矩。因而对于计算梁的侧向挠度的刚度为

$$I = \frac{1.05 \times 0.00068}{0.3} \times 7 = 0.017$$

垂直构件工作与横向板构件的状态相似，只是作用平面转过 $90^\circ$ ，因而，在图7.6中，



图7.8 下伸式梁格的部分截面表示着由于横向弯曲对纵向梁的侧向挠度

平面外

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{4 \times 0.021^3}{12} \times 7 = 2.2 \times 10^{-6}$$

$$C = \frac{bd^3}{6} = \frac{4 \times 0.021^3}{6} \times 7 = 4.4 \times 10^{-6}$$

$$A = bd = 4.0 \times 0.021 \times 7 = 0.59$$

平面内

$$\text{设 } I = \frac{(\text{跨度})^3 d}{12} = 600$$

$$A = bd = 4.0 \times 0.021 \times 7 = 0.59$$

### 7.2.2 下伸式梁格输出数据整理

图7.9示出图4.3的梁单元，但具有内梁剪力流 $r_{01}$ 和 $r_{12}$ 及平衡的轴向拉力 $P$ 。单元的平衡从式4.1分为两部分，第一，按纵向求解，

$$\frac{dP}{dx} + (r_{12} - r_{01}) = 0$$

而第二取绕 $Oy$ 的力矩

$$-\frac{dM_x}{dx} + \frac{z_c}{I_x} \frac{dP_x}{dx} = S_x \quad (7.1)$$

式中： $z_c$  为板形心以下至梁的形心的距离。

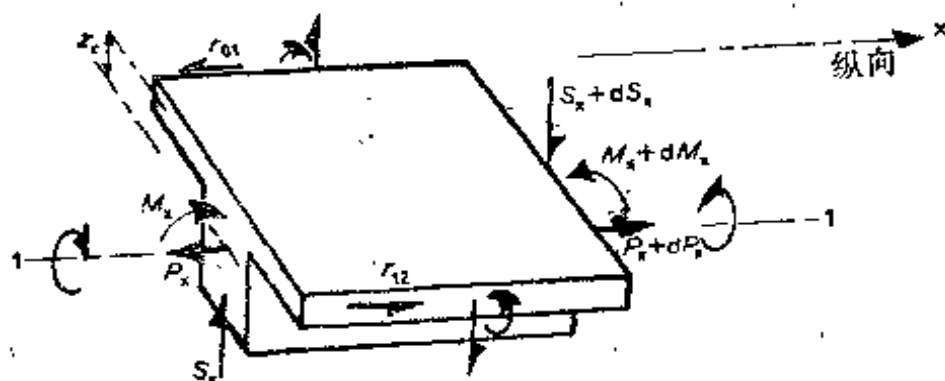


图7.9 梁板式上部结构的梁单元

如同预应力梁一样，在任一水平线上的轴向应力由下式计算：

$$\sigma = -\frac{M_x z}{I_x} + \frac{P_x}{A_x} \quad (7.2)$$

图7.10示出一个上部结构横截面处下伸式梁格的纵向和横向构件输出实例。从这些输出数据中用式7.2所推导的轴向(弯曲)应力表示于图7.11中。

在纵向构件内腹板剪力和梁的扭转的输出值即为精确值。

按第2.3.2节所提到梁的要点，求出翼缘内(略去内梁由于弯矩引起的剪力)的剪力流，只是现在应计入由于梁由轴力流的分量而沿图2.6的构件受拉纤维而改变。

$$\tau_t = \tau = -\frac{dM_x}{dx} \frac{A\bar{z}}{I_x} + \frac{dP_x}{dx} \frac{A}{A_x} \quad (7.3)$$

式中： $\bar{z}$  为从截面形心至横截面单元面积  $A$  的形心距离； $A_x$  和  $I_x$  各为梁的面积和二次面积力矩。

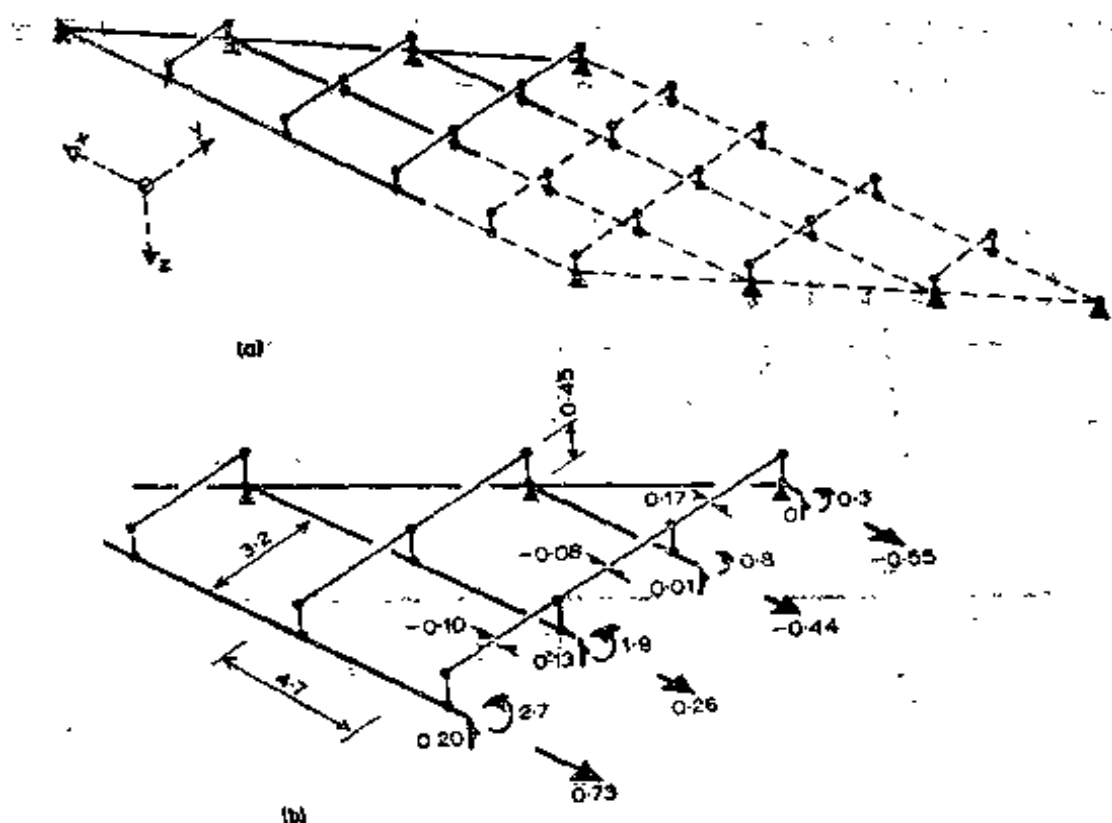


图7.10 具有图7.11截面的上部结构下伸式梁格

用式7.1, 则得:

$$r_f = \tau_f = \frac{S_x A_z}{I_x} - (r_{12} - r_{01}) \left[ \frac{A}{A_x} - \frac{z_c \bar{z} A}{I_x} \right] \quad (7.4)$$

内梁剪力流  $r_{12}$  和  $r_{01}$ , 可直接用每根所代表的构件宽度除图7.10中横向构件平面内的剪力的输出数据计算出来, 然后把它们绘成虚线表示于图7.12a中。用式7.4和输出的腹板剪力  $S_x$ , 可以计算出腹板边缘处的翼缘剪力流。翼缘剪力流作三角形分布, 从T梁腹板处的极大值减至翼缘边缘处的零值。它们均表示于图7.12a中, 将内梁剪力流叠加即得总剪力流图。

### 7.3 麦克亨利(McHenry)空间桁架

由上面所述的下伸式梁格限于梁板式上部结构, 其中板

的侧向挠度是略去不计的。当复杂的空间构架模型可以用麦克亨利(McHenry)桁架建立就可受到较小的限制条件。

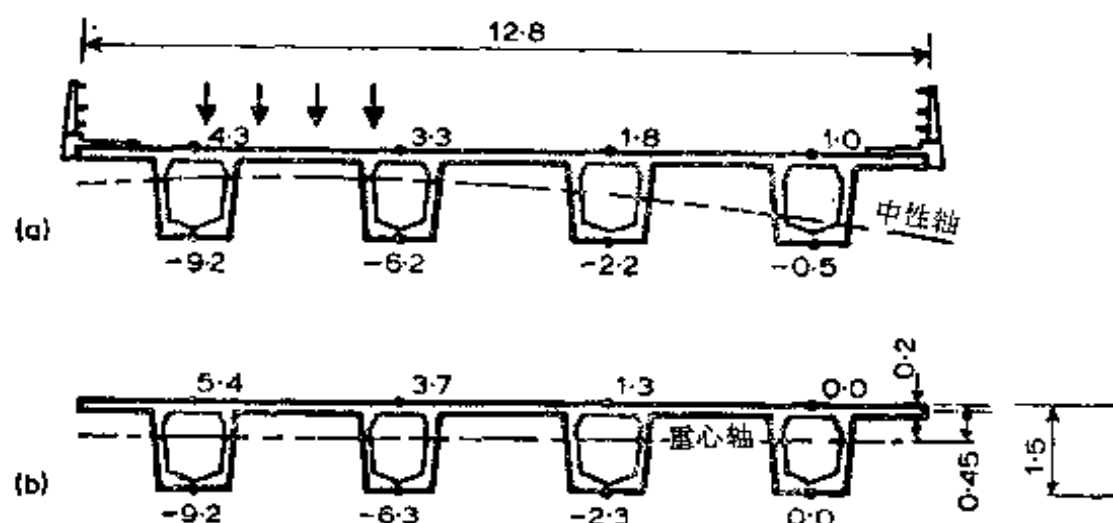


图7.11 空间梁板式上部结构内的轴向(弯曲)应力  
(a)由下伸式梁格求出的应力；(b)由平面梁格求出的应力

麦克亨利(McHenry)[1]指出，像如图7.13a的板平面内变形那样，可以用图7.13b中的等效桁架来研究。每一板单元(如图7.13c中)由等效构件宽度表示的铰接桁架(如图7.13d)来代表。若用用细网格，桁架可以精确模仿泊松比 $\nu = 1/3$ 的板的性能。对于 $\nu$ 的其他值，在普通的建筑材料中，其误差一般上是略去的。

麦克亨利(McHenry)桁架可以用来建立如图7.14a所示的梁板式上部结构的空间构架模型。板节缝象下伸式梁格一样不受约束，桁架还可以用于分格式上部结构分析，如图7.14b所示。

然而，由霍克(Hook)和李却蒙特(Richmond)[2]指出：剪力柔性梁格还可以用于分格式上部结构而具有同样的精度，这是因为内梁顶板上剪力由底板反向剪力所平衡(比在梁内增加拉力或压力更好些)。顶板和底板平面内的抗剪

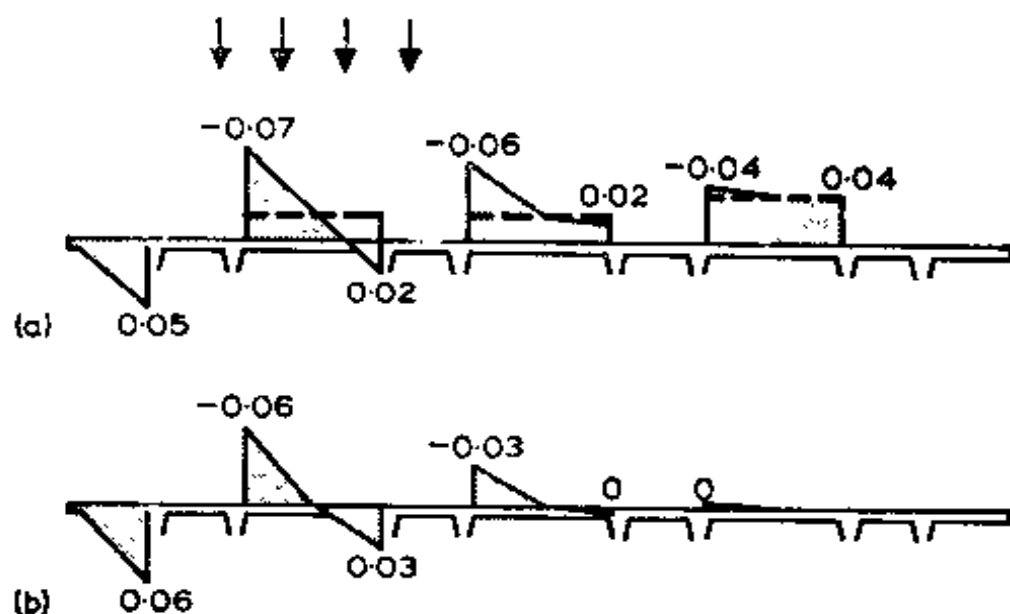


图7.12 空间梁板式上部结构内板的剪力流  
(a)由下伸式梁格求出的剪力流；(b)由平面梁格求出的剪力流

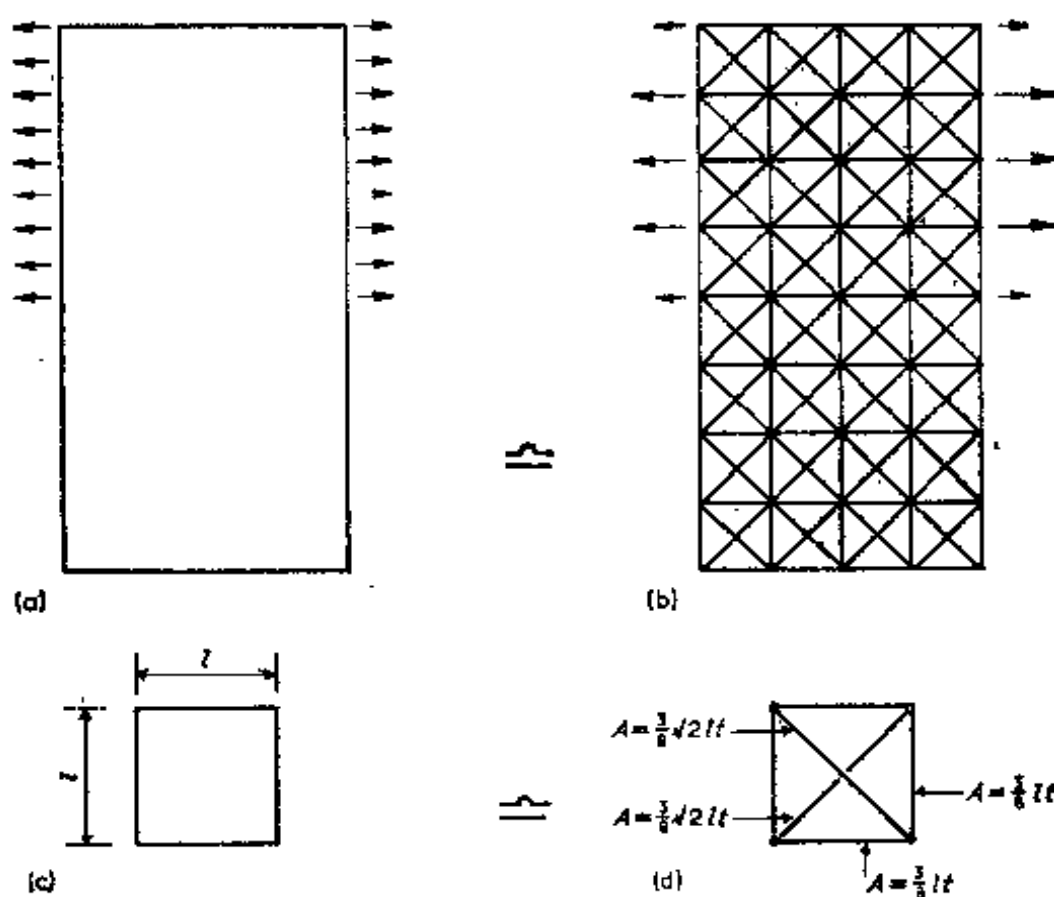


图7.13 麦克亨利 (Mc Henry) 桁架



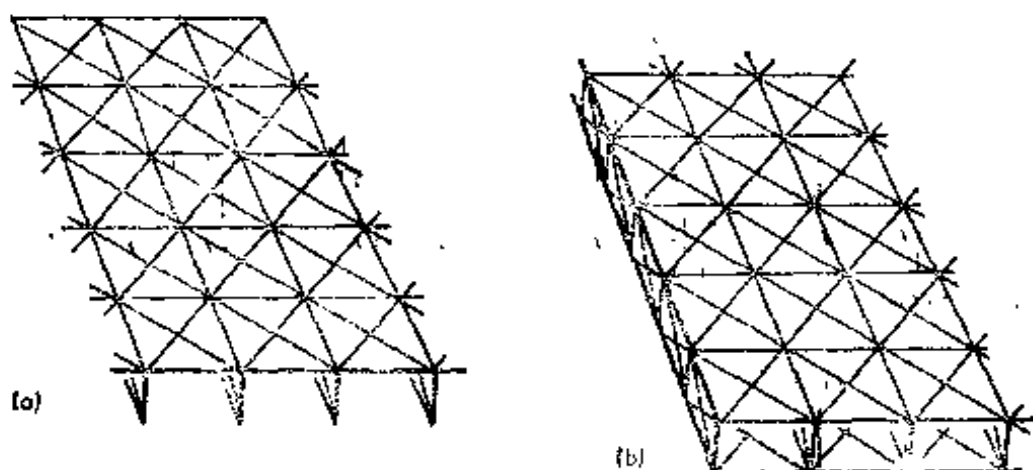


图7.14 麦克亨利 (McHenry) 桁架式空间构架

刚度可以适当地由如第5章所叙述的格室抗扭常数来代表，然而麦克亨利(McHenry)桁架提供在横隔板与腹板交会处尽可能用比平面梁格更佳的表达型式，而且由于桁架单元可以代表任何平面的板，对于分析具有斜腹板或具有多数的横隔板(或斜交)的上部结构，麦克亨利(McHenry)空间桁架是较易适应和精确的。

## 7.4 十字型空间构架

梁板式和多格式桥梁的上部结构，还可以用空间构架作三维模拟，该构架构件布置成十字型，如图7.15所示。这个方法如麦克亨利(McHenry)桁架法一样易于适应而且较简单，它是由大不列颠铁路部门提出的[3]。原型的面板和腹板设想划分成为矩形单元(尽可能接近于相同的形状)，而这些单元在空间构架模型内由梁十字型构件来代表(如图7.16所示)。因为在交叉位置处于一个方向压缩和弯曲与另一方向压缩和弯曲之间无相互影响，所以实际上模型假定泊松比为零(用于剪切模量除外)。

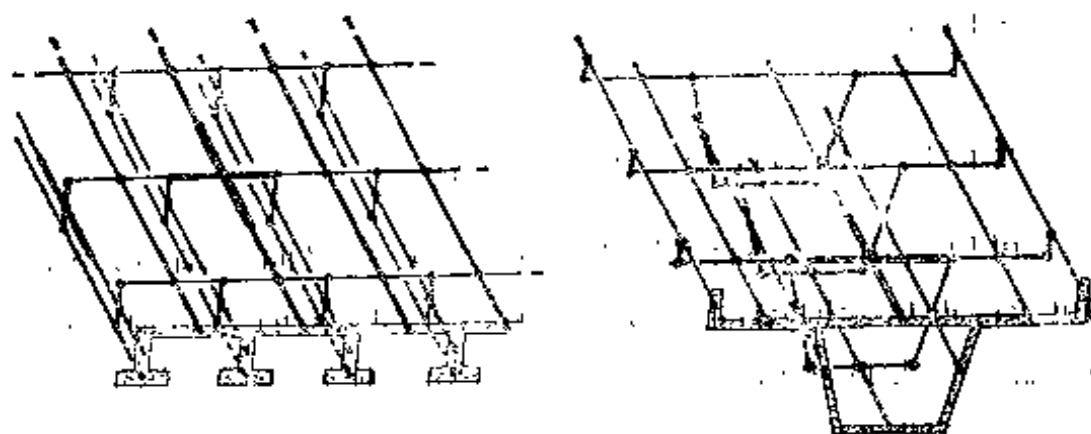


图7.15 十字型空间影架

用一个如图 7.16 指向的十字型代表性构件  $PQ$  表示出绕局部构件轴的截面特性:

受压面积  $A_{xx} = 2bd$

平面内受剪面积  $A_{yy} = \frac{2bd}{1 - 0.4(a, b)^2}$

平面外受剪面积  $A_{zz} = 2bd$

抗扭常数  $C_{xx} = \frac{2bd^3}{6} \quad (7.5)$

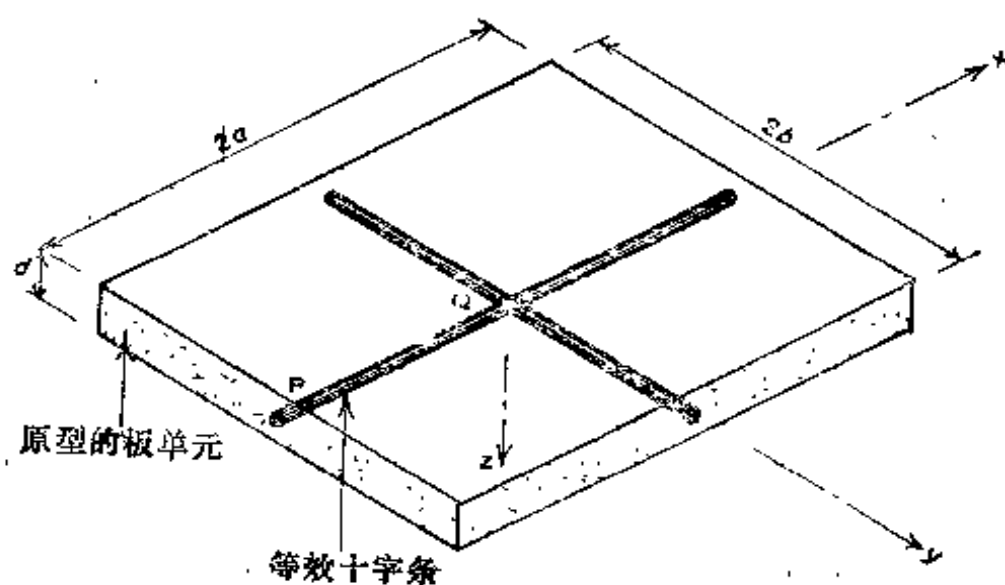


图7.16 十字型单元

$$\text{平面外弯曲惯性矩 } I_{yy} = \frac{2bd^3}{12}$$

$$\text{平面内弯曲惯性矩 } I_{zz} = \frac{d(2b)^3}{12}$$

可以看出, 受剪面积  $A_{yy}$  的表达式是双曲线函数, 而对于  $a/b$  接近 1.58 时趋向无穷大, 在  $a/b > 1.58$  时为负值。除非  $A_{yy}$  输入值非此不可, 否则  $a/b = 1.58$  的比值应该避免。

十字型模型还可以用在具有三个方向的构体来模拟一种材料的实体单元。在这种情况下, 每根构件的两个受剪面积如用上面所述的  $A_{yy}$  来计算。

## 7.5 关于梁板式上部结构性能 ——板的薄膜作用

### 7.5.1 轴向应力和中性轴的移动。

在任一点上的轴向应力是由于弯矩  $M_x$  和拉力  $P_x$  引起的

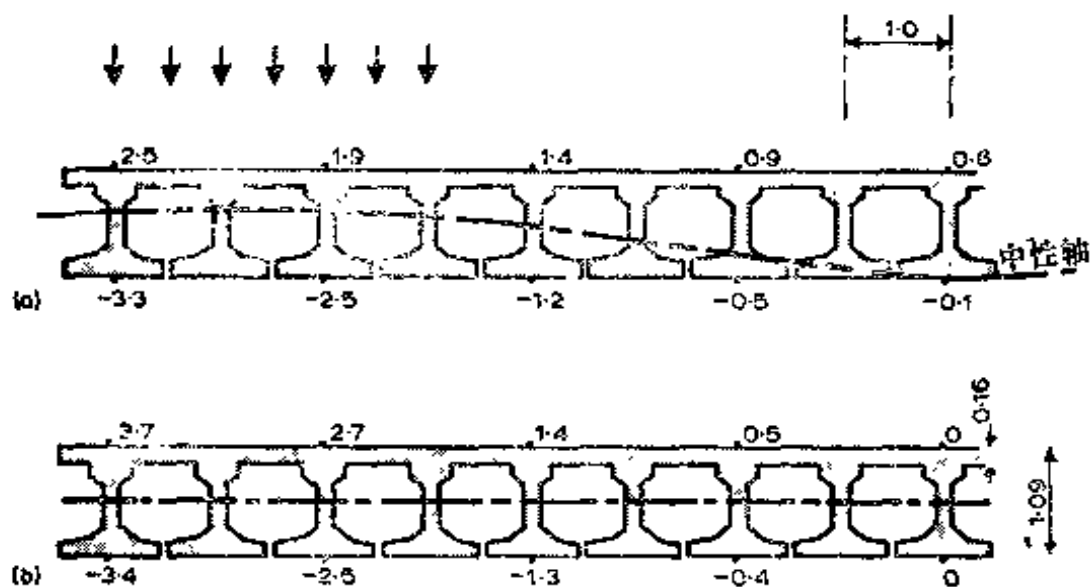


图7.17 密排梁板式上部结构的轴向(弯曲)应力  
(a)由下伸式梁格求出的应力; (b)由平面梁格求出的应力

应力的组合。图7.11a和7.17a为稀和密排式梁的上部结构横截面上的轴向应力。在中性轴处组合的弯曲与直接应力等于零，该轴受载后在上部结构区域内偏上或偏下移动。

比较图7.11b和7.17b示出从平面梁格分析的弯矩所计算出来的应力。有趣的指出，只有板的应力明显受到板的薄膜作用影响。底部应力两种分析中都是相近的。然而若上部结构还有连续的上伸式护墙，则如第八章所讨论的，在边缘处中性轴发生移动是较明显的。

### 7.5.2 板的剪应力

图7.12b示出相应于(图7.12a)的下伸式梁格，从平面梁格计算所求得的板的剪力流。显然对于这种稀排的梁式上部结构，内梁剪力流是很小的。因此，从平面梁格中求出的平面内的剪力的最大值与下伸式梁格所求出的没有明显的差别。然而，如图7.18a和b所示各下伸式和平面式梁格所代表的密排梁板式上部结构就不是这种情形了，因为梁是这样靠近，彼此之间的板条对于剪力来说是十分刚性的，其内梁剪力流占总数的绝大部分。在图7.18情况中，在下伸式梁格内的剪力流是按平面梁格计算的三倍。

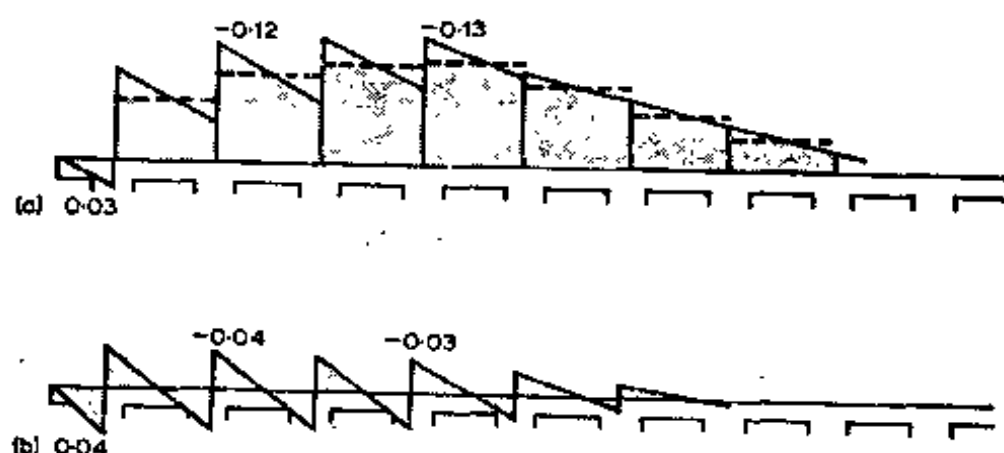


图7.18 在密排梁板上部结构内板的剪力流  
(a)由下伸式梁格求出的剪力流；(b)由平面梁格求出的剪力流

在密排梁板式上部结构中，受载区边缘处的控制截面的板内很大的剪力流，可以从平面梁格输出值求得近似估算值。第7.6.1节所讨论到板的薄膜作用，仅在面板上有明显的效应，而在底翼缘却没有此效应。就受载区域的边梁来说，从无载区到边缘，如同一个十分宽的翼缘出现薄膜作用，如图7.17所示。由于剪力滞后的影响，翼缘有效宽折减约为  $1/6$  跨径。在这样宽的翼缘受载时，应重新计算上部结构的截面特性，并利用平面梁格输出  $S_x$ （这与下伸式梁格的  $S_x$  稍有差别），和下伸式梁格一样，可以按简单梁理论的方程式2.4直接来估算板内的剪力流。可以看出，梁的间隔愈宽，这  $1/6$  跨径值，对每根梁的翼缘的有效性就愈小，板的薄膜作用也就不大显著。

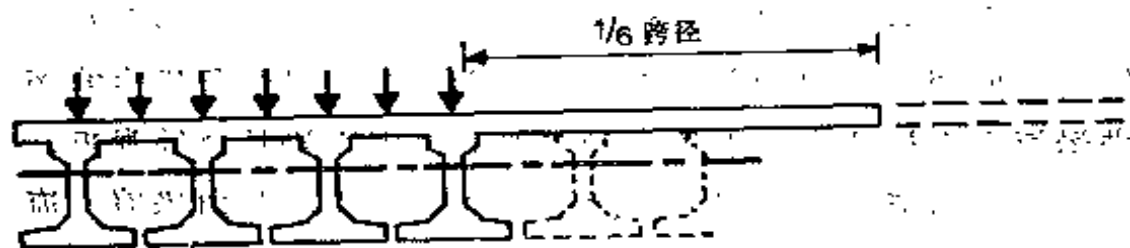


图7.19 荷载边缘处板的剪力流的有效翼缘截面

### 参考文献

1. McHenry, D. (1943), 'A lattice analogy for the solution of stress problems,' J. Inst. Civ. Eng., 21, PP. 59-82.
2. Hook, D. M. A. and Richmond, B. (1970), 'Precast concrete box beams in cellular bridge decks,' struct. Eng., 48, PP. 120-128.
3. British Railways Board (1972), 'computer analysis of plates and slabs using frame and grillage programs and required data preparation,' Technical Note No. 26, Civil Engineering Department, Internal report.

## 第八章 剪力滞后和边梁加劲作用

### 8.1 剪力滞后

图 8.1 所示分格式和梁板式上部结构的薄面板，可以考虑为工字梁或 T 形梁的翼缘。当这种工字梁或 T 形梁受挠曲时，在每一翼缘靠近跨径中点处，纵向边缘剪力把压、拉力引入到翼缘中去如图 8.2 所示（这个图还示出存在平面内的横向力，它阻止腹板两侧的翼缘相互弯开）。在轴向压力和

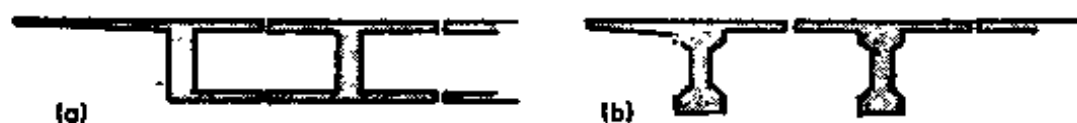


图 8.1 上部结构截面分为工字梁或 T 形梁

偏心的边缘剪力流作用下，翼缘产生扭转变形（如图 8.3），它不再按照简单的平面截面理论的假定受压。扭转变形程度按照翼缘在平面内的形状以及沿其边缘剪力流的分布两者而定。图 8.3a 明显指出，狭窄翼缘的扭转变形不大，而其性能接近于简单梁

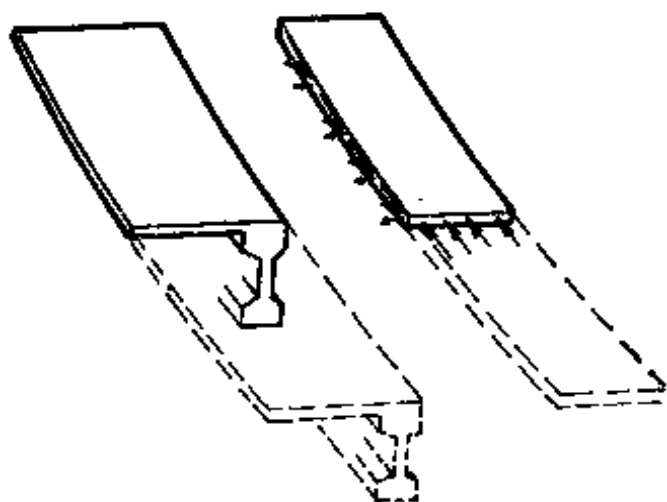


图 8.2 翼缘上的力

理论的假定。反之，图8.3c和d所示的宽翼缘则扭转变形很严重，因为由边缘剪力引起的压缩在离开受载区边缘不远处就不发生，所以宽翼缘的较大部分是无效的。由于剪切扭转变形使远离受载边缘的翼缘压缩的减小值称为“剪力滞后”。

## 8.2 翼缘有效宽度

为了使得简单梁的理论能够用于宽翼缘梁的分析，故对翼缘定出一个“有效翼缘宽度”，翼缘的有效宽度为假设的翼缘宽度，沿其宽度上它受均匀压缩，其压缩值如同在同样的边缘剪力作用下的实际翼缘的受载边缘数值一样。另外，有效宽度可以认为是理论的翼缘宽度，该理论翼缘承受具有均匀应力的压力。该均匀应力与原型宽翼缘处的应力峰值相等，而且总压力值相同。图8.3示出特定形状的翼缘的实际宽度和在每个原型的跨径中点处压应力的分布以及理论上等

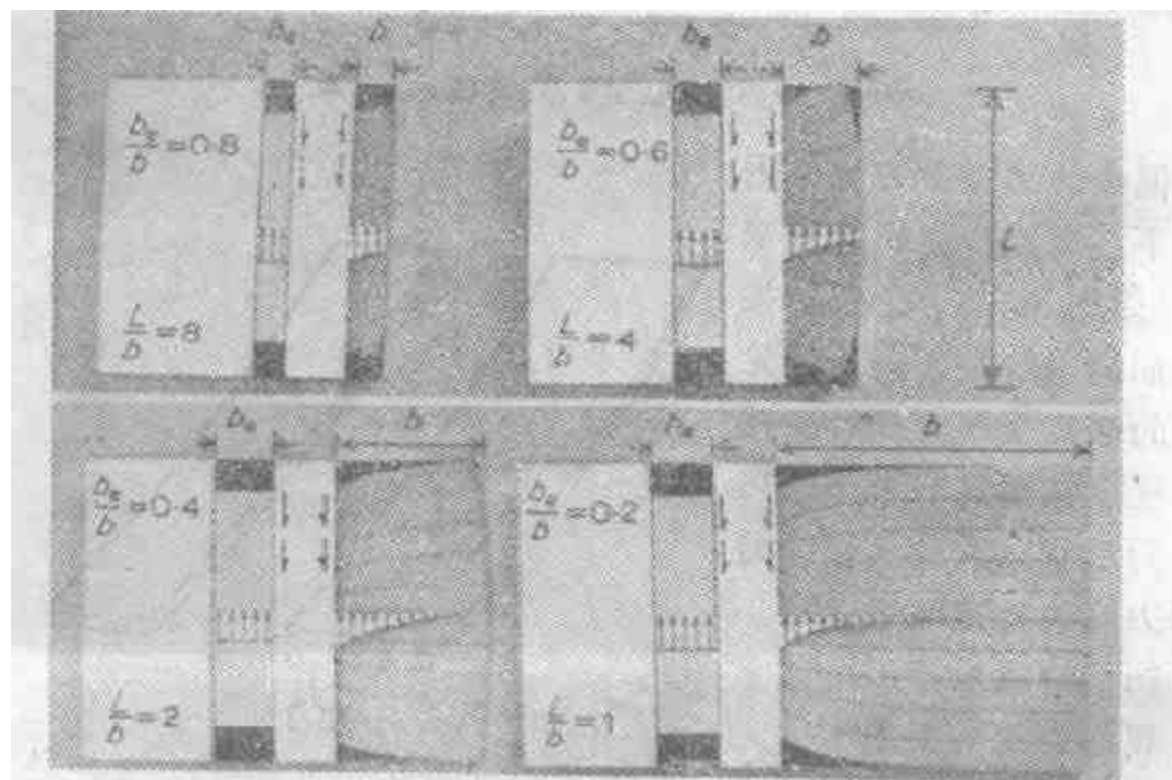


图8.3 宽度不同的翼缘扭转变形的剪力滞后

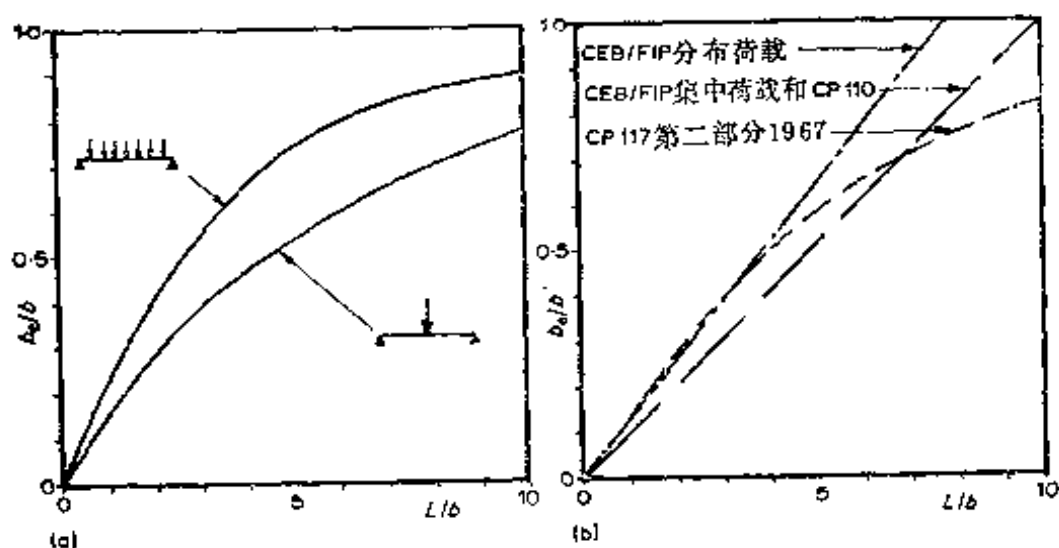


图8.4 不同形状的有效翼缘宽度  
(a)理论上的集中荷载和分布荷载的比值；(b)设计规范的建议值

效的有效宽度。

有效翼缘宽度与零压缩点(即反弯点)间的翼缘长度两者的一般关系如图8.4所示。图8.4a表示对于承受均布荷载或跨径中有集中荷载的梁翼缘在有效值 $b_e/b$ 和形状值 $L/b$ 之间的理论关系。图8.4b示出由各种设计规范所建议的关系值。各种荷载作用下翼缘有效宽度的差别可以用图8.5来解释。在图8.5a中表示集中荷载作用下,翼缘边缘剪力流向右流至荷载作用点处是大的,而接近跨径中点剪力流引起的压力不可能分布到整个翼缘。对比之下,对于图8.5b中表示各种荷载作用下的剪力流作用到翼缘的两端,所产生的压力则分布到大部分的翼缘长度。荷载分布和翼缘形状的影响的精确分析是极其复杂的。虽然图8.4b的设计规范关系曲线,一般来说用于分析混凝土桥是足够精确的,参考文献[1]还包含到更复杂的钢箱型梁桥的要求。薄钢板有效翼缘宽度的计算比混凝土截面来得复杂,因为薄翼缘有效宽度由于板的压屈以及剪力滞后而更降低。当然,如果用格构,褶皱板,或考虑板



的薄膜性能的有限元模型作详细的三维分析，则剪力滞后的效应会自动地计入，而不需要求出翼缘有效宽度。

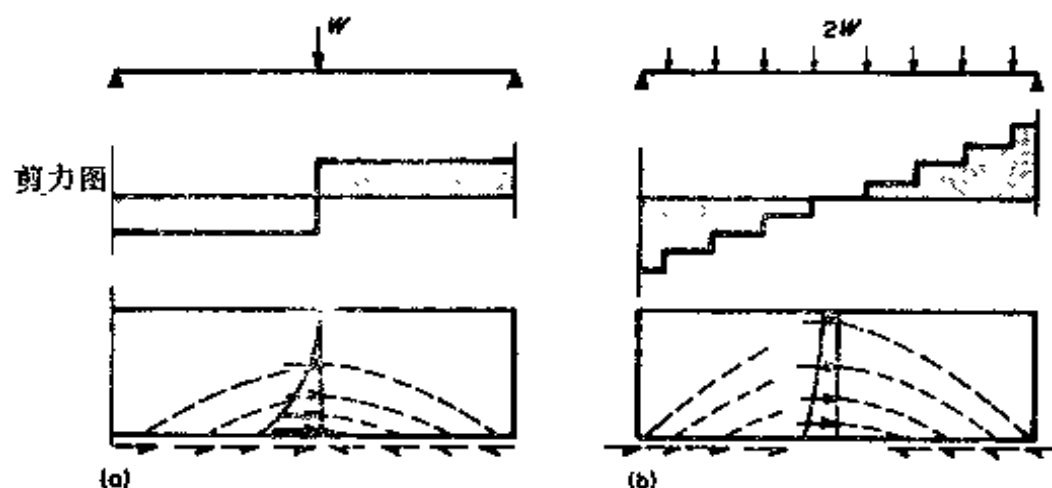


图8.5 翼缘内不同的应力分布  
(a)集中荷载；(b)分布荷载

连续式桥梁上部结构有效翼缘宽度，沿梁长有明显的变化。这是一部分由于沿跨长的反弯点间距及支点间距各不相同，而另一部分则由于跨上为分布荷载，支点为集中反力有相当差别所致。图8.6显示沿上部结构的长度的边缘剪力流的变化值，及横贯翼缘的压力和拉力的分布。

根据图8.4定出折减的翼缘并把它计入到每根纵梁内，这样就把剪力滞后的效应引进到梁格分析中来。图8.7表示两种上部结构的部分横截面和用于计算梁格构件特性的有效截面。这些截面还用于从梁格输出数据来计算腹板最大弯曲应力以及翼缘根部剪力流的数值。

在宽翼缘内，纵向弯曲应力的实际分布朝外边缘而减少。它的形状可从梁格求出的峰值和翼缘的有效宽度来推算。图8.8为分格式上部结构的工字梁单元的梁格有效截面。把简单梁理论应用到折减的截面去，横贯每个有效翼缘的应力是均匀的(如虚线所示)，而且等于腹板边缘处的应力

峰值。真正的应力分布从峰值逐渐减弱以及朝向翼缘的实际边缘变平。在每个翼缘内总的轴向力，也就是在应力曲线下的面积，对于均匀的窄的有效翼缘和较宽的实际翼缘来说，这两个面积都是相同的。因此可以通过峰值，并在折减的翼缘范围内以均匀应力围成相同的面积，就能够绘出实际的应力分布图。

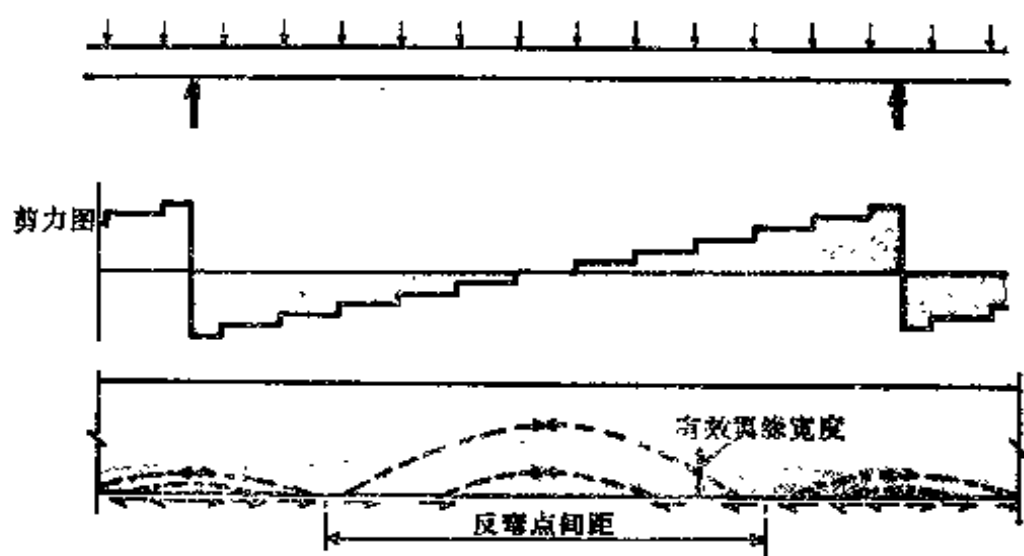


图8.6 连续式上部结构的翼缘变化的有效宽度

### 8.3 板式上部结构边梁的加劲作用

若边缘用梁来加强，则板式上部结构靠近边缘处就能够较好地承担荷载。图 8.9a 示出一具有加劲梁的板式上部结构，它的形心在板的中面上。它的弯曲惯性矩可绕板的中面，按梁的截面全部有效算出。当梁的形心不在板的中面（如图 8.9b 所示），则改善了加劲梁的刚度来达到目的，因为那时梁连同板式桥面成为 L 型梁，而板式桥面在某种程度上起着翼缘的作用。在弯曲作用下，中性轴在中央范围内仍然接近板的中面，但到边缘则偏上。对边梁起着翼缘作用的板

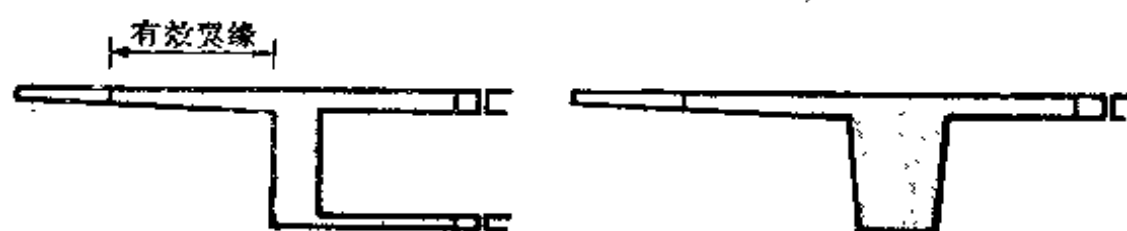


图8.7 梁格分析的有效截面

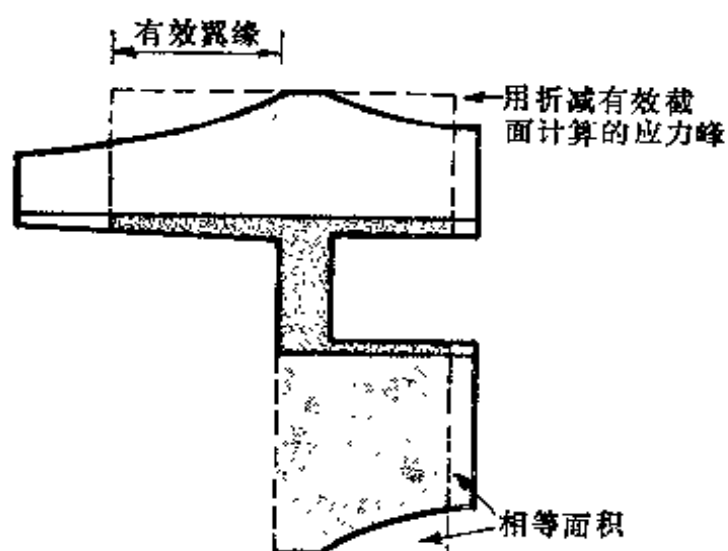


图8.8 从峰值和有效翼缘宽度来决定弯曲应力的分布

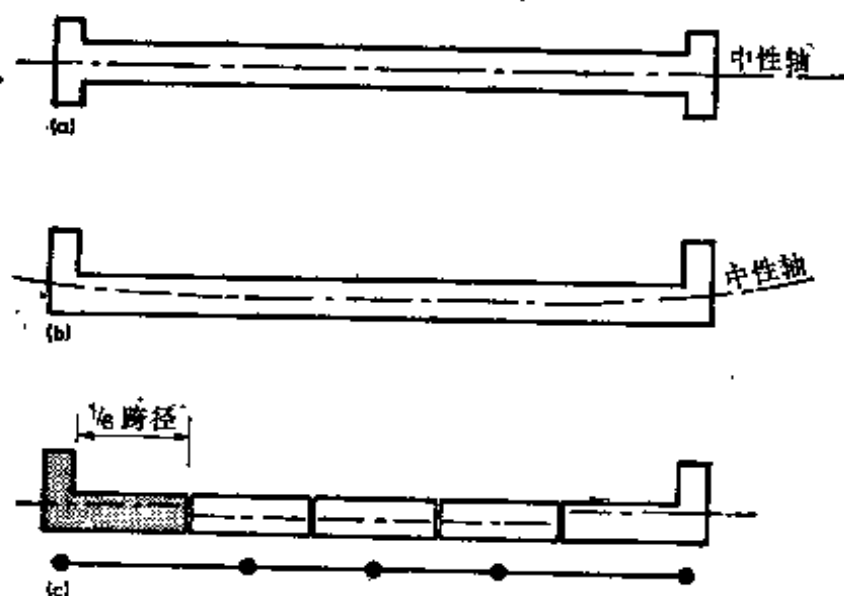


图8.9 板的边梁加强

(a)边梁形心在板的中面上；(b)边梁形心在板的中面以上；(c)梁格截面

宽，由于剪力滞后作用受到了限制。有效的宽度可以按第8.2节中所述办法求出，约等于 $1/6$ 跨长(如图8.9c所示)。

## 8.4 梁板式上部结构的上伸式护墙

梁板式上部结构的荷载分布特性，可通过增设护墙而大为改善。图8.10a和b则表示具有和不具有上伸式护墙的上部结构接近边梁处承受荷载的按隔板分析(见第十二章)所得的弯曲应力。显然，尽管在上伸式护墙顶部引起很大的压力，但在边主梁内伴生的应力是远小于那种没有护墙的上部结构的应力的。护墙有效地与边主梁一起工作时，则如图8.11所示。

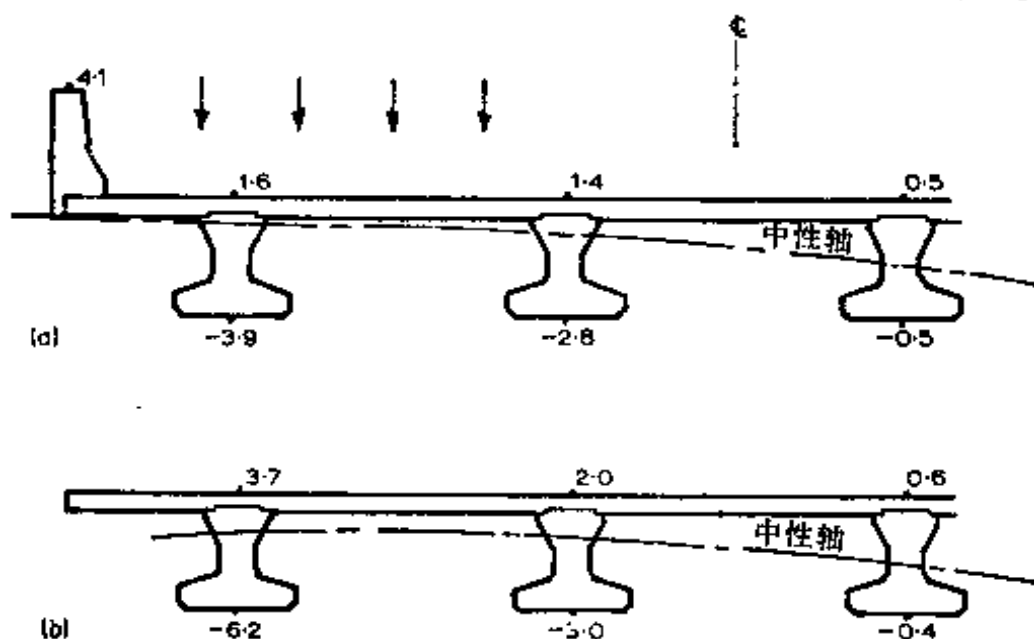


图8.10 梁板式上部结构按隔板分析的弯应力  
(a)有护墙时；(b)无护墙时

图8.10和图8.11中所估算的板的应力是有差别的，因为在梁格分析中，承载梁右侧的板是不承受由第七章所述的内梁剪力所增加的压力的。另一方面，在梁格分析中，护墙的效果为显著，故出现较高的应力。在平面梁格与三维结构

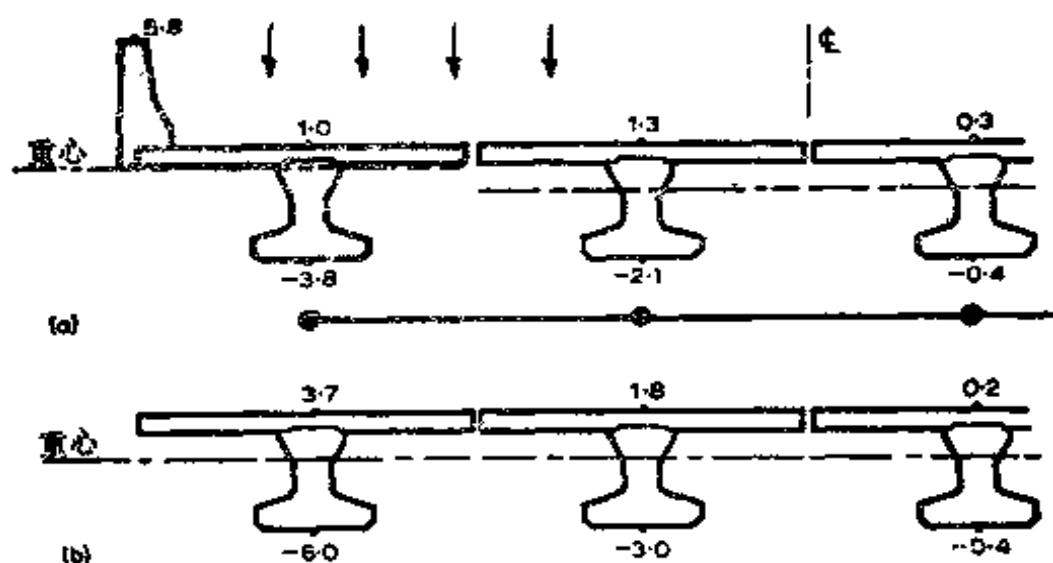


图8.11 图8.10所示上部结构梁格的弯应力

中，两者比较，很大程度视梁的间距是否靠近而定。如果梁密排在一起，则若干根将与上伸式护墙起着共同的作用。因此，若护墙在平面梁格分析中假定是结构的边梁一部分，则建议把它的形心线与三维分析（下伸式梁格、褶皱板或有限单元）导出的中性轴线分别作比较，用来校核截面的有效性能。

护墙在结构上是弊多利少。首先，护墙端部必须正确地支承在横隔梁上，施工工序需要相当细致，因为收缩的影响是较严重的。护墙与节缝的整体性是很重要的，还必须核算护墙受压后顶部压屈的稳定性，而且悬臂板承受纵向剪力流是自由悬臂板的二至三倍。护墙必须做得很坚固，使得它不可能被车辆所冲坏。最后，分析必须谨慎从事。可以作出结论，如果上伸式护墙是出于行车上的原因而不是结构上的需要，则应该具有不连续的足够的伸缩缝（同时它们必须保持足够的横向强度，以防止车辆越过）。

上伸式护墙还可用于分格式上部结构，但其弊病较为明显。分格式上部结构的荷载分布特性通常是如此的良好，使

得整个横截面或较宽的部分，在接近边缘处也能有效地支承荷载。增设较高的上伸式护墙在刚度上影响很小而使其顶部出现较高的压应力，并引起悬臂板较高的剪应力。然而，在宽悬臂外侧边缘上设置小梁来达到对边缘局部加劲可能是很有用的。

## 8.5 梁板式上部结构的管线通道

由于布置各种设施，往往在桥梁人行道或边梁下设置管线通道。有些在顶部沿全长开口（人行道板则横铺其上）如图8.12b所示，其他形式则为箱型梁如图8.12c所示。当荷载靠近这些不同的结构时，其结构作用是有差别的。图8.12示出三种不同的结构形式按褶皱板分析所算出的弯曲应力。显

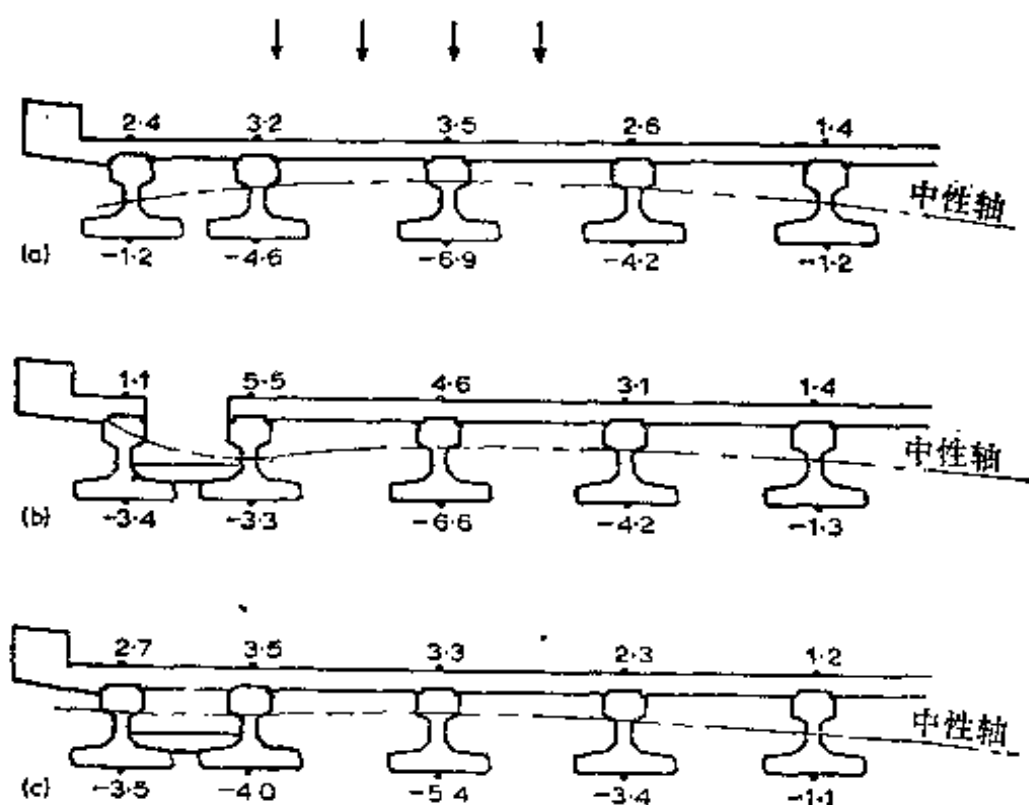


图8.12 具有不同边梁细节的梁板式上部结构弯曲应力（按褶皱板分析）  
(a)无管线通道；(b)开口式管线通道；(c)箱型式管线通道

然，最佳的分布（即极大应力较小）是边梁为箱型时求得的。因为除了引起大的弯曲剪应力外，它还承受大的扭转剪力流，故在靠近边缘的腹板的剪应力是很大的，而且往往达到设计的临界值。应该注意，若底板与每一边的腹板相连接，不仅刚性大，而且更能传递纵向剪力流。实际上，在预制梁之间就地灌筑的混凝土板以形成通道或箱型梁的底板是非常困难的，因为节缝不可能在结构性能上有足够弯曲或纵向剪切刚度。

具有开口式管线通道的上部结构荷载分布性能不好，因为将通道做成U型梁，承受偏心荷载时，外侧腹板大部分是没有效的。但设置通道后具有易于进出的优点，在靠近跨径中点处做成箱型横截面，而在端部做成开口截面，则这种不

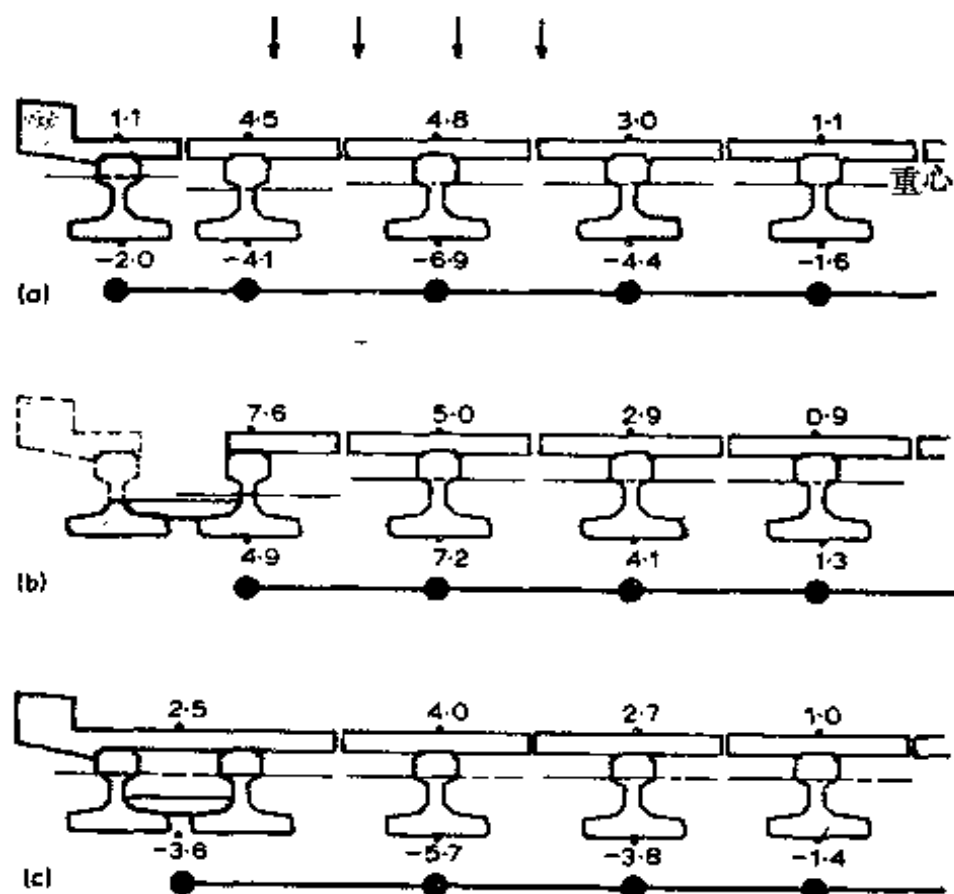


图8.13 由图8.12的上部结构的梁格模型估算的弯曲应力

良效果可以大为避免。在靠近跨径中点处，箱梁有很大的横向弯曲刚度，提供所需要的有效荷载分布，而靠近支点处取消顶板，则可避免在边箱出现大的扭矩，该扭矩使靠近边梁的腹板受剪时产生超应力。最后，应该注意，在设计时，外梁刚度和强度若略去的话，则此梁与上部结构的板的连接应该设计成断缝的。如果它们做成连续式，这只是名义上的强度，则在上部结构受弯时将出现裂缝。

图8.13为图8.12所示上部结构各种梁格模型所算得的弯曲应力的比较。对于边梁所采用的截面则如阴影部分所示。

### 参考文献

1. Department of the Environment(1973), 'Inquiry into the basis of design and method of erection of steel box girder bridges' Report of the committee, London, Her Majesty's Stationery Office.



## 第九章 斜交式、变宽度式和 曲线式上部结构

### 9.1 斜交式上部结构

#### 9.1.1 斜交式上部结构的性能

目前大部分桥梁上部结构建成斜交、变宽度或曲线的形式。如果为了避免桥梁的斜交及复杂性而改用其他运输定线方案，就会对交通规划有效空间及行车速率的提高增加限制。可幸的是，由于借助计算机分析方法的出现，对日益需要的较大斜交的桥梁已伴随产生，现在一般能够设计出任意斜交角度的结构。

除介绍上部结构的设计细节外，斜交桥在上部结构性能和临界设计应力上都有值得重视的效应。关于斜交板式上部结构的特性，现扼要列于图 9.1 中，即为：

(1) 沿宽度最大弯矩方向的变化，在边缘处与斜跨方向平行，在板的中央则接近垂直于桥台；

(2) 靠近钝角处出现上拱弯矩；

(3) 上部结构承受很大的扭转；

(4) 钝角角隅处出现较大的反力和剪力；

(5) 锐角角隅处出现较小的反力，还可能出现翘起。

这些效应的大小与斜交角、宽跨比、特别是上部结构和支点构造形式有关。图 9.2 则表明形状和边缘细节能够影响到最大弯矩的方向。在图 9.2a 和 b 中上部结构直接置于桥台

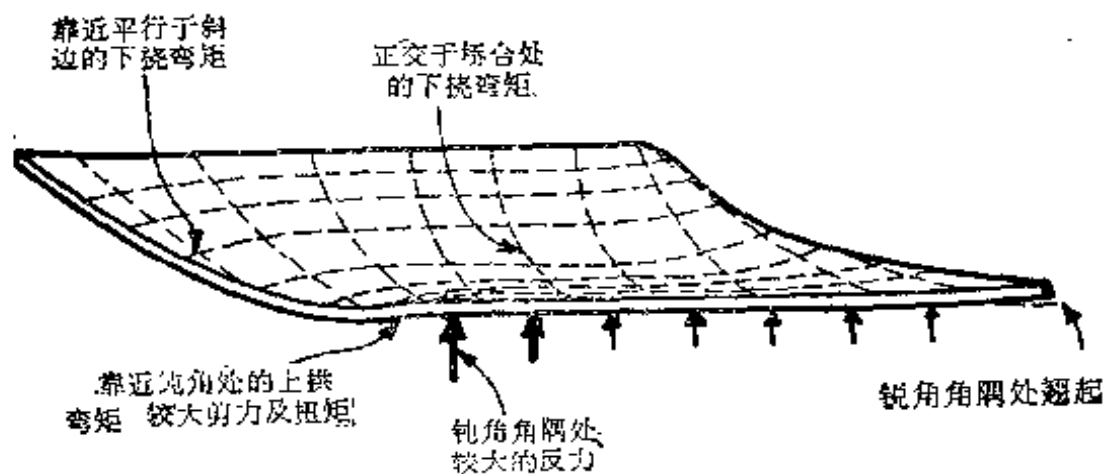


图9.1 斜板式上部结构的特性

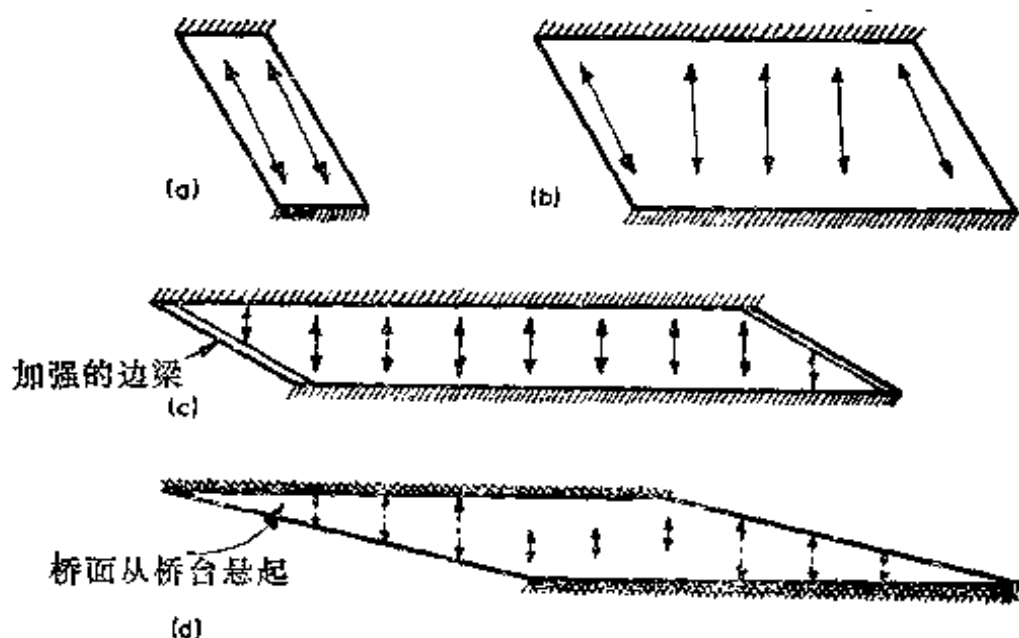


图9.2 斜交板式上部结构主弯矩方向

之上，而图9.2c则具有加强的边梁对板起着线支承作用使板沿全宽与桥台直交。而图9.2d斜角特大，使得上部结构在锐角角隅好象从桥台悬臂出似的。

上部结构支承在软支座上可以减小斜交的危害影响。在钝角隅处支座上较大的反力由邻近支座所分担，除减少最大反对值外，还降低了板内由于剪力和扭转形成的剪应力，并

且减少了在钝角隅处的上拱弯矩，使锐角隅处的翘起也可以消除。然而，这种沿着桥台的力重分布却带来跨径内的下挠弯矩的增加。

上述的特性在实体的和分格的板式上部结构中是特别明显的，因为它们有较大的抗扭刚度来抵抗上部结构的扭矩。相反，在梁板式上部结构中，特别是稀排梁板式，斜交式的特性是不明显的。图9-3a, b和c示出一个承受均布荷载的稀排梁板式上部结构的平面、正面和正剖面。在桥台处相邻梁各靠近点，其纵向坡度有很大的差别〔显示于图9.3b〕，而且还有一相对的垂直位移〔显示于图9.3c〕。如果板与梁的抗扭刚度很小，则上部结构的扭转变形就可能在没有产生很大反力的情况下出现。在局部集中荷载作用下的分布仍然由于板的横向弯曲而发生，但各梁在纵向跨度上要比正桥大得多。然而，在钝角处梁内的剪力和反力的增加仍然是明显的，而且应予以考虑。但在锐角处翘起则是不可能的。必须注意，如果梁是具有很大抗扭刚度的箱型截面，则它们将引起很大的扭转。可以发现腹板内的扭转剪力是过大，因而在扭转上用柔性的工字梁是比较合适的。

一般来说，在斜交角小于  $20^\circ$  的简支上部结构中，斜交

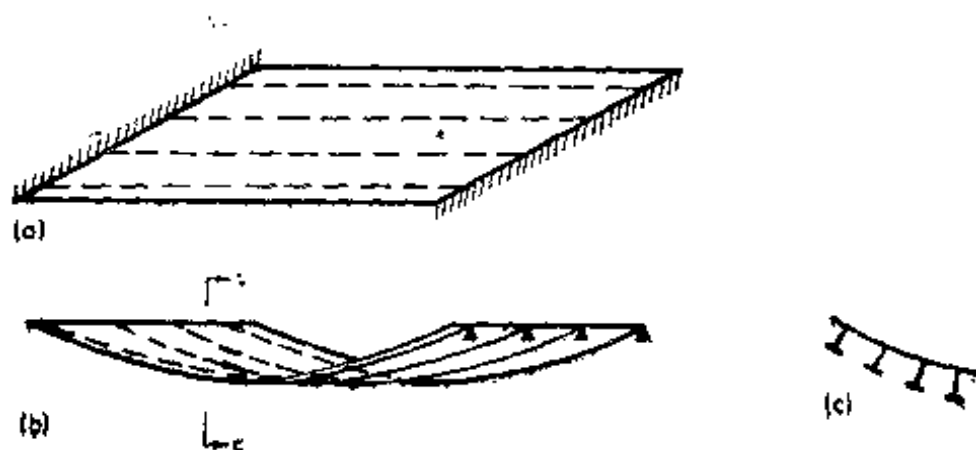


图9.3 斜交梁板式上部结构  
(a)平面；(b)正面；(c)剖面

的影响是不予考虑的。然而，在连续式上部结构，特别是在中间支承区域内，虽然斜交角转小，但影响是明显的。图9.4a和b示出三跨分格式上部结构边腹板的梁格弯矩图。在图9.4a表示与支承正交，在图9.4b表示与支承成斜交角 $20^\circ$ 。这两者均在整个中跨受载。在中跨处差别很小。然而，由于斜交关系，在斜交的支点靠近受荷载跨内的支点处弯矩、剪力(锯齿形弯矩图的斜率)和反力都有很大的增加。

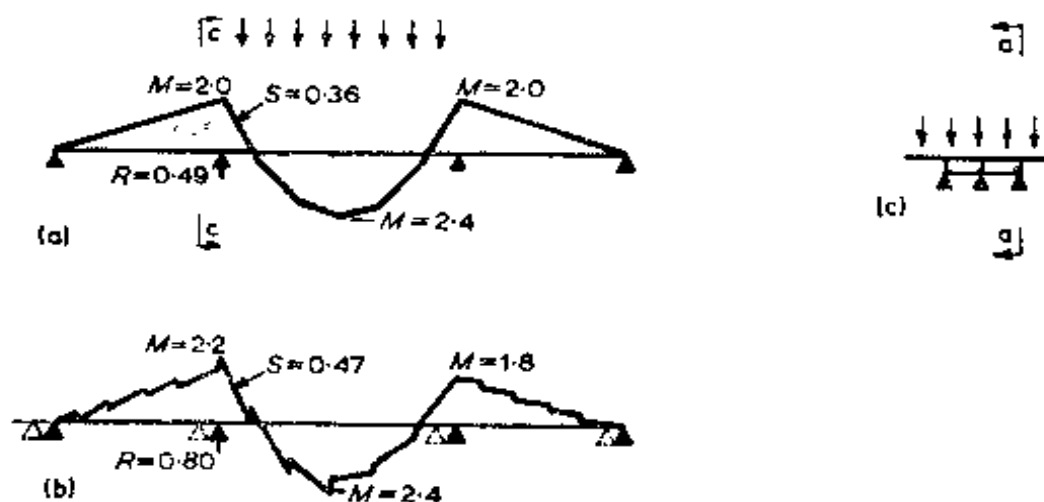


图9.4 边腹板梁格弯矩图  
(a)正交的分格式上部结构；(b)斜交 $20^\circ$ 角的分格式上部结构

### 9.1.2 斜交式上部结构的梁格网格

简支斜交各向同性板式上部结构的设计弯矩，可以从鲁斯 (Rusch) 和赫根罗德 (Hergenroder) [1] 或伯辣斯 (Balas) 和海纳斯卡 (Hanuska) [2] 所拟制的影响面求得。然而，这些图表有难于使用的缺点，没有给予使用者在特定荷载情况下上部结构的力系以一个完整的图式，而且不能用于正交异性板、分格式或梁板式上部结构，因为它们的扭转变形和抗扭特性有很大的差别。一般来说，对于上部结构的所有类型使用梁格分析是十分方便的。即使在初步设计阶段，当斜桥的跨径与梁高的比值及施工方法还不清楚时，与其选用需

要整理和换算图表数据的方法，倒不如用快而粗略的梁格法为好。

斜交式上部结构可以用斜交网格如图9.5a所示，或可正交网格如图9.5b和c所示的梁格来分析。虽然对于小的斜交角用斜交网格是方便的，由于在结构主导作用方向没有构件，所以对斜交角大于 $20^\circ$ 情形是不适用的。若上部结构有较大的斜交角，则在平行于这些斜交方向上配筋，钢筋的数量可能是过量的和不经济的。一般来说，梁格构件应该设置成平行于设计的强度线，该线通常是正交的。克拉克(Clark)〔3〕提出，对于狭窄板式上部结构，钢筋应该设置在图9.5b的网格方向上，而对于桥台宽度大于跨径的上部结构，一般来说，采用图9.5c的网格是较适当的。然而对于分格式上部结构和梁板式上部结构，纵向梁格应该平行于腹板或梁通常如图9.5b所示。

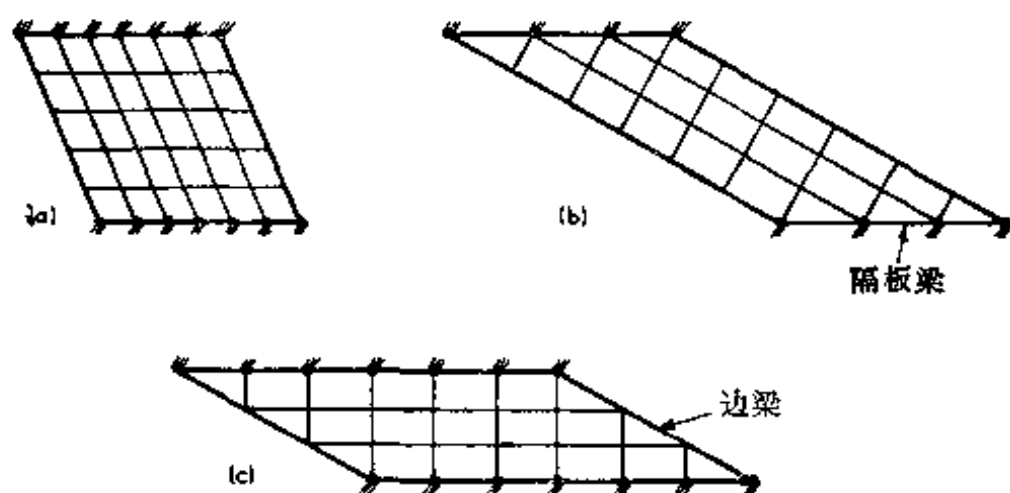


图9.5 斜交式上部结构梁格

(a)斜交式网格；(b)正交于跨度的网格；(c)正交于支承线的网格

尽管第三、四和五章的一般论述，可应用到斜交式上部结构，但在有关图9.5b中接近横隔梁处和图9.5c的边梁处的构件中，引起了一个问题，即：如果构件特性为均匀的，在三

角形区域部分不止一次的重复代表了上部结构。若正交构件被假定作为代表典型的上部结构,则它们必须有典型的截面特性。由于梁格所代表的原型条不是变宽度和尖顶形的,故梁格构件刚度的折减就没有必要。边缘添加的梁格构件的刚度必须表示与原型轴线相重合所增加的刚度。若原型是一块没有加劲梁和特殊端部的板,则斜交的梁格为虚拟刚度。然而,若在上部结构里面或上面有加强横隔板或边梁构造,刚等效的梁格刚度必须适应实际加劲梁的大小与强度,其中要包括参与翼缘作用的部分面板。

即使设计强度线与梁格可以选择得接近平行于主弯矩方向,但在梁格内仍然可以预期出现较大的扭距。在板式上部结构内的最大弯矩和应力,可以正交的弯矩和扭矩用第3.3.3节中的方程式计算出。钢筋混凝土上部结构必须设计为能够抵抗弯矩和扭矩的共同作用,而且用伍特(Wood)[4]和亚美(Armer)[5]的方程式是合适的。梁板式和分格式上部结构的梁格输出数据整理分别可以参见第4.7节和5.7节内叙述的方法。

## 9.2 变宽式上部结构

桥梁上部结构很少有较大的变宽度形式,而如图9.6所示的变宽度式梁格,可以使用而无需作特殊考虑。唯一的问题是梁格构件特性必须沿着构件的轴线递增,因而作数据准备和输出数据整理是麻烦的。在分析中,微小的变宽度可以略而不计,因为它对上部结构的性能的影响甚微。然而,若上部结构也是处于较大的斜交角的,则边缘将为极不相同的跨度,则必须同时用变宽度或斜交式的梁格来模拟。

扇形结构如图9.7所示时,可用梁格法来分析。在相邻

辐射式构件之间的夹角可以做成不大于  $15^\circ$  而不会引起明显的误差。梁格网格的曲形方格应该接近于“正方格形”，而辐射式格件的刚度要等效于位于沿其长度中点的截面刚度。这样就使网格在圆心处显得非常接近，但如果考虑到原型内按钢筋或梁的外形的强度线不能够汇交于一点而必须切短时，则梁格网格也应该切短。

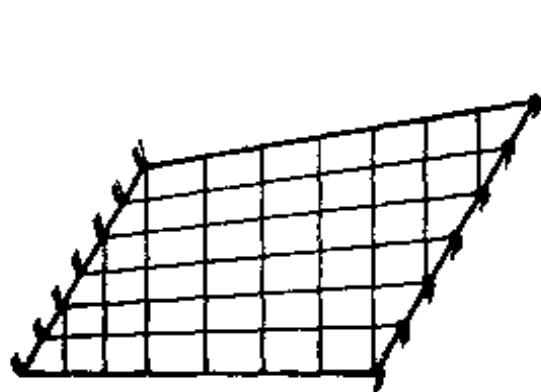


图9.6 变宽度式梁格

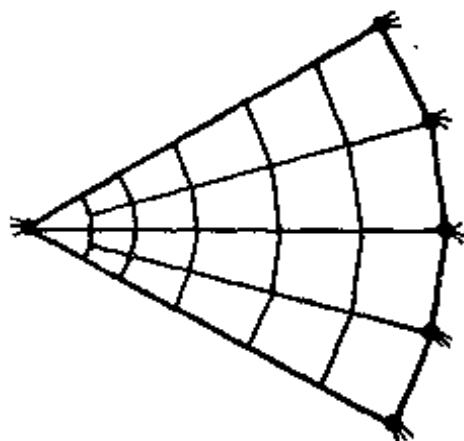


图9.7 扇形板的梁格

## 9.3 曲线式上部结构

### 9.3.1 曲线式梁

当垂直荷载作用在曲线式梁上时，则弯矩和扭矩沿梁长相互影响；若支点间的曲率角小于  $20^\circ$ ，则扭矩对于弯矩的影响是微小的，而上部结构可以考虑为跨径等于弧长的直线式梁，但必须对支座反力给予特殊考虑。一般来说，在各种荷载作用下，最简单的分析方法是使用梁格法，可用如下所述的直线构件的“曲线”串来代表一根曲线式梁。尽管这样，惠特克(Witek)〔6〕和托泼勒(Toppler)等人〔7〕还提出了较方便的近似手算法。在多梁式上部结构中，在较小曲率角度处，由于各梁间的重分布，弯矩和扭矩之间相互影响是很

明显的。在讨论曲线式上部结构梁格分析前，先提出曲线式梁的平衡和位移方程式。

图9.8为一平面曲线梁单元。其长度为  $ds$ ，平面曲率半径为  $r$ ，而夹角为  $d\alpha$ 。在偏心为  $y$  处承受垂直荷载  $dW$ ，这个力由梁的弯矩  $M$ ，剪力  $S$  和扭矩  $T$  来抵抗。根据单元的平衡条件，则有：

$$\begin{aligned} dS &= -dW = -W(s)ds \\ \frac{dM}{ds} - \frac{T}{r} &= S \\ -\frac{M}{r} + \frac{dT}{ds} &= y \frac{dW}{ds} \end{aligned} \quad (9.1)$$

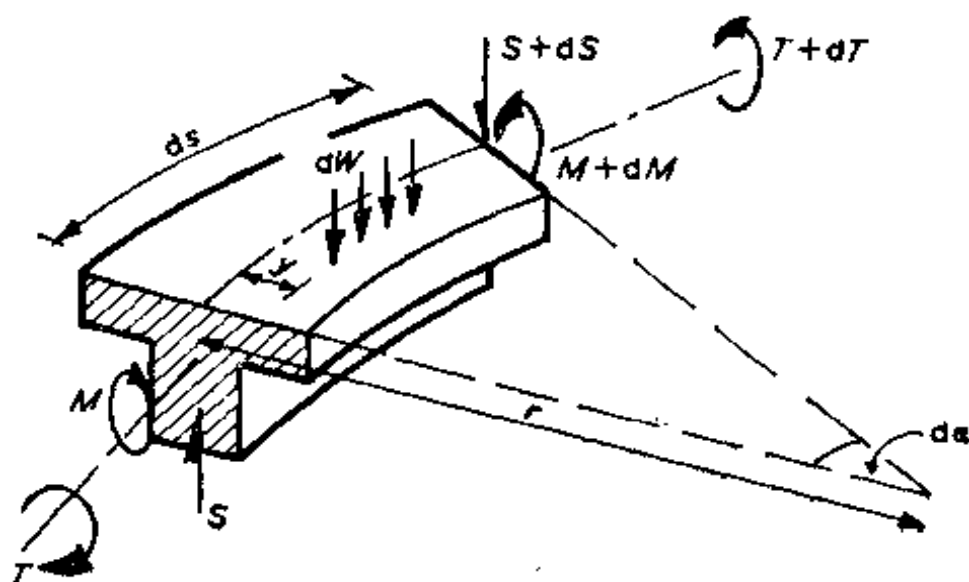


图9.8 曲线式梁单元上的力

单元的弯曲和抗扭刚度与式2.5和2.14的直线式梁相同，只是弯矩和扭矩则与挠度有关：

$$\begin{aligned} M &= -EI \left( \frac{d^2 w}{ds^2} - \frac{\phi}{r} \right) \\ T &= -GC \left( \frac{d\phi}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dw}{ds} \right) \end{aligned} \quad (9.2)$$



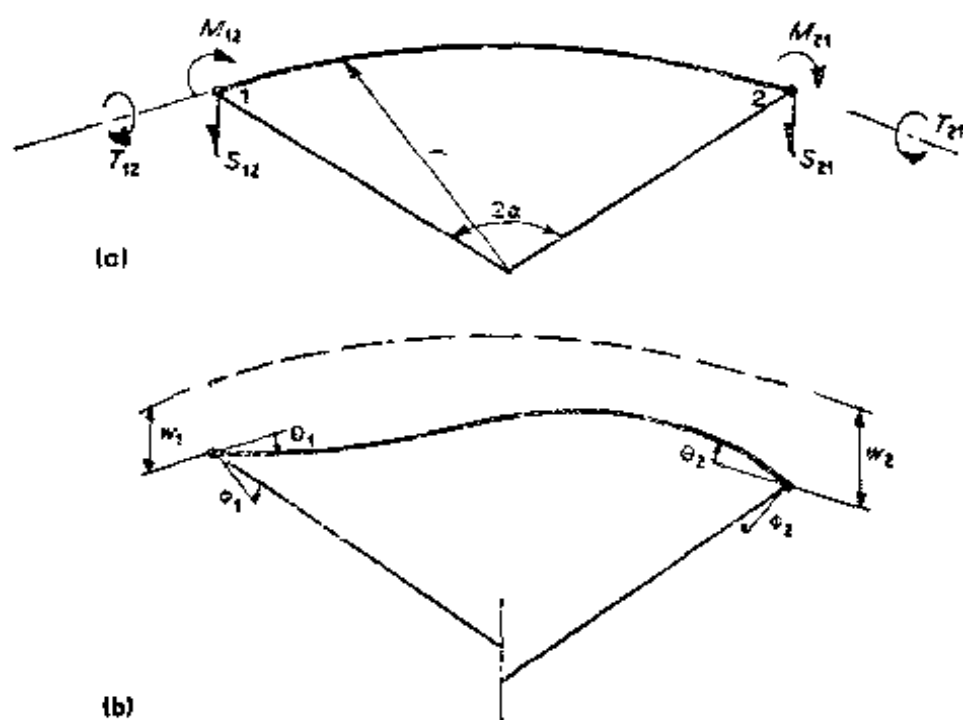


图9.9 (a)曲线式梁上的端点力; (b)端点位移

若弯曲和抗扭刚度 $EI$ 和 $GC$ 沿梁长是均布的, 则图9.9的端点力和端点位移可采用文献[8]所介绍的复杂的角变位移方程式。

### 9.3.2 曲线式上部结构的梁格分析

曲线式桥梁上部结构可以用如图9.10a中曲线式构件, 或如图9.10b中的直线式构件所组成的梁格进行分析。某些计算机程序有表示曲线构件的功能, 但对直线式构件的梁格在精确度上的改善并不显著, 不够保证一般使用。而且多数程序没有这种功能, 故必须使用直线式构件。

如果按第三、四和五章的一般规定求构件的间距, 则将发现节点处的方向最大改变值很少需要大于 $5^\circ$ 。当远小于这样的角度时, 即不会使真的曲线梁与直构件的“曲线”在性能上有明显的差别。在原型内, 弯矩和扭矩对曲线构件的连续和平滑性上有互相的影响。在直线式梁格内, 这种互相影

响只发生在节点上，因此每一种类型的力都是非连续的。但构件中点附近的力的数值即代表原型的数值。通过这些点的数值可以绘出光滑的分布曲线，并用内插法求其他各处的值。确切地说，梁格输出的数据整理与第三、四和五章对于构造的相应类型所叙述者相同。

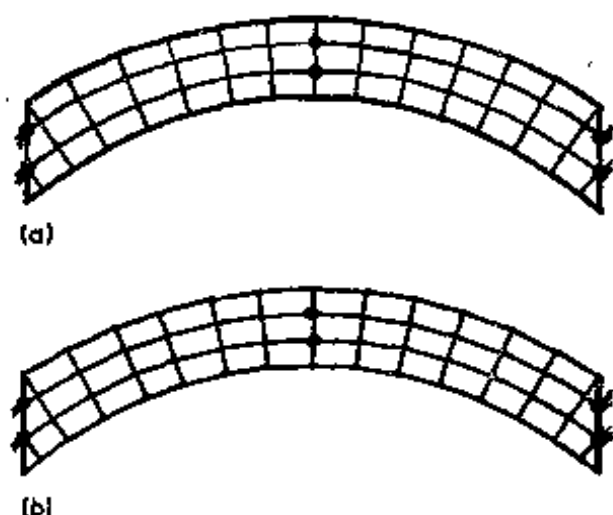


图9.10 曲线式上部结构的梁格  
(a)曲线式构件；(b)直线式构件

### 参考文献

1. Rusch, H. and Hergenroder, A. (1961), Influence Surfaces for Moments in skew slabs, Munich, Technological University, 1961. Translated from by C. R. Amerongen, London, Cement and Concrete Association.

2. Balas, J. and Hanuska, A. (1964), Influence Surfaces of Skew Plates, Vydaratelstvo Slovenskej Akademie Vied, Bratislava.

3. Clark, L. A. (1970), "The provision of reinforcement in simply supported skew bridge slabs in accordance with elastic moment fields," Cement and Concrete Association, Technical Report.

4. Wood, R. H. (1968), "The reinforcement of slabs in accordance with a predetermined field of moments," Concrete, 2, 69-76.

5. Armer, G. S. T. (1968), "Discussion of reference

4," Concrete,2,319-320.

6.Witecki,A.A.(1969), "Simplified method for the analysis of torsional moment as an effect of a horizontally curved multispan continuous deck," First International Symposium on Concrete Bridge Design. A. C. I. Publication SP-23,PP.193-204.

7.Toppler,J.F.,Chaudhuri,B.K., Van den Berg,J. and Harris,F.R.(1968), "Horizontally curved members; an approximate method of design," Concrete,2,PP.418-425.

8.Blaszkowiak S.and Kacz Kowski,Z.(1966),Iterative Methods in Structural Analysis (translated by Kacner,A.and Olesiak,Z.),Pergamon Press,Oxford.

## 第十章 初步设计图表

### 10.1 引言

在借助计算机分析梁格以前，图表对荷载分布是最简便方法，使用在一般设计上是足够快捷的。有限差分和松弛法用手算都是方便的，但对大型和复杂的结构却相当麻烦。现在把数值图表编印出来，以应付各向同性板和正交异性板以及其他的上部结构形状的设计极限弯矩等等的手算工作。这一章对这些图表作出评述，然后对板式、梁板式和分格式上部结构的初步设计三种图表的使用作一说明。

所有图表都是有局限性的，一般说来，能够直接计算设计弯矩的图表只限于承受特定荷载情况的上部结构构造的个别形式，荷载情况也不是最不利的。可是，对于能够计算在不同荷载下的各种上部结构类型的一套具体的图表在使用上是较困难的，而且要求相当多的内插值及用手算来求出临界条件，往往由于规定的细节过于复杂，使得使用者由于怕麻烦而丧失勇气。

许多图表对简支式桥梁上部结构纵向弯矩能作出精确的计算，然而，一般来说，它们不能详细地代表横截面构造的广泛变化，除简单板式结构外，对于所有的上部结构的横向弯矩的估算往往是不满意的。另外，少数图表能够精确的计算出支点处的剪力，但它往往与纵向弯矩分布所得者有所区别。

在第10.3至10.6节中所陈述的三种图表是为了快速研究上部结构构造类型广泛变化的荷载分布特性，并能快速的计算出最大的设计弯矩。为了使图表简易和通用化，故对各种上部结构的次要特性的差别没作说明。这种特性在很大程度上象斜交式、连续式和横截面形状等因素，起着很大的影响，而这是完全能够较满意地用梁格或其他的借助计算机分析方法来模拟的。这些图表主要是帮助设计者对构造类型，和上部结构尺寸作出初始选择。

## 10.2 荷载分布图表

### 10.2.1 各向同性板

最有用的一系列的图表之一，是泼吉尔 (Pucher) [1] 所著的具有各种形状和支承条件的各向同性板影响面一书。除了用于求简支直交板式上部结构的设计极限弯矩外，这些图表还提供关于梁板式和分格式上部结构的次要面 (Secondary slab) 在集中荷载下求算弯矩的最简单方法。对于这两种应用制成影响面来表达，使得它比较易于单独定出临界荷载位置，然后计算出设计弯矩。

斜交式简支各向同性板，可以用鲁斯 (Rusch) 和赫根罗德 (Hergenroder) [2] 或伯辣斯 (Balas) 海纳斯卡 (Hanuska) [3] 的图表来分析。虽然大量有价值的数据可以从这些上部结构的特别形状的图表求出，但从各种纵横尺寸的比值和各种斜交式的图表之间找出内插值是极其麻烦和可能弄错的。一般来说，在初步设计中，较快的和较有效的办法是第九章所叙述的方法，即用估算的特性作梁格的快速分析。

### 10.2.2 正交异性板

最广泛的使用于正交异性板上部结构的荷载分布图表是摩利士 (Morice) 和立德尔 (Little) [4] 所发表的。这些图表的理论基础由罗 (Rowe) [5] 提出的, 并加以说明其详细应用方法。有两套图表分别给出无抗扭刚度的板和完全具有抗扭刚度的各向同性板的荷载分布。对于大多数桥梁上部结构设计, 需要有一套图表作内插值, 及简单的稍为冗长的列表计算方法的参考资料。

上述的图表是以第十二章内所述的谐波分析为基础的, 并给出由于第一荷载谐波的挠度分布值。可幸的是, 由于大多数设计荷载的纵向弯矩分布都接近于第一谐波的挠度。但横向弯矩主要视集中荷载的局部分布 (即较高谐波) 而定, 而且需要对若干个横向弯矩的谐波分量作叠加。对于此种分析文献描述了第二种较复杂的列表计算方法。

在求算横向弯矩时, 为了避免叠加大量的谐波分量, 柯逊 (Cusens) 和帕玛 (Pama) [6] 研究了相似于文献 [4 和 5] 的一套图表, 对跨径中点有集中荷载的头九个谐波作了叠加, 这就减少了横向弯矩的计算工作量。但确切地说它意味着图表只是应用于接近跨径中点集中荷载, 对于远离跨径中点的不同位置上的荷载的弯矩就未包括在叠加之内。这也许对初步设计的效果是无关重要的, 文献 [8] 所表示的这些图表, 对某些设计者来说是非常方便的。此外, 它们包括的抗扭刚度较为广泛, 使它们能够用于第六章中所述的剪力铰上部结构。剪力铰桥面上部结构还可以用文献 [9] 的图表来分析, 这些图表是专门为这种桥面推导的。

文献 [4 ~ 8] 的图表, 均与正交异性板式上部结构有关。如果可以把梁板和分格式上部结构的集中刚度设想“延伸开”成为一连续体而不改变上部结构特性, 则这些图表还可以精确地用于这些上部结构中。换言之, 这些图表系假设

上部结构横截面以一光滑曲线作挠曲的，如图 10.1a 所示。若上部结构横截面在刚度集中处挠曲成“梯阶”状（如图 10.1c 所示）时，则这些连续曲线的图表将不能模拟此种横截面的扭转变形。由于它们是假定刚度集中于横截面各点为基础的，这就受到限制，不适用于下列章节所示例的图表中。否则上部结构会扭转变形成“梯阶”状的。

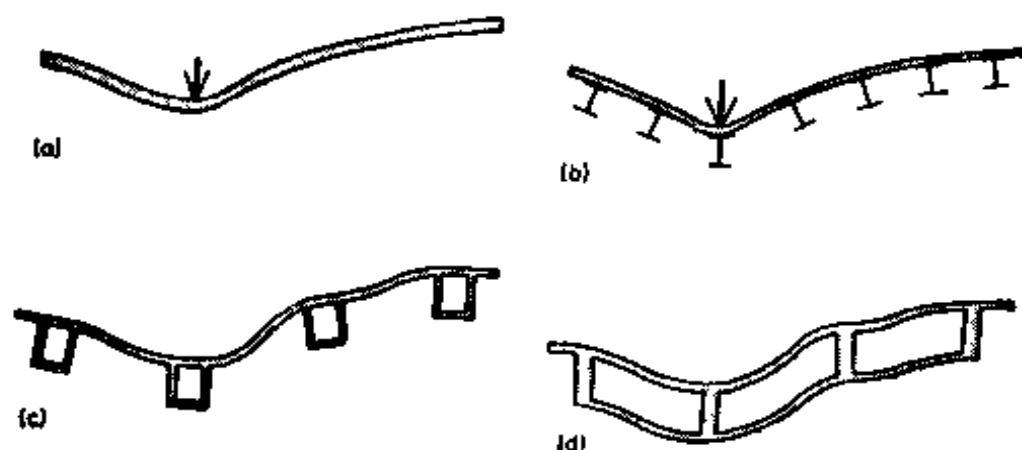


图10.1 各种上部结构的横截面  
(a)和(b)扭转变形成一光滑曲线；(c)和(d)扭转变形成一系列的梯阶

## 10.3 板式、梁板式和分格式上部结构的影响线

### 10.3.1 图表的编制

图10.2～图10.4包括求算直交简支板和梁板以及分格式构造的上部结构横贯横截面各点的影响线图表。这些图表是重复运用近似的褶板法而编制的，该法提要见附录B。

用这些图表来分析任一种上部结构，第一步是和梁格分析法一样，设想把上部结构划分为许多平行“梁”（如图 10.5所示）。然后，可用三个无量纲的参数来概括上部结构

的物理特性。这些参数与结构的刚度变化有关，它们是：

$f$  弯曲刚度比。即板或“梁”间板的横向弯曲刚度与“梁”的纵向弯曲刚度的关系式。

$r$  转角刚度比。对于板和梁板式上部结构，为板和梁的抗扭刚度与板的横向弯曲刚度的关系式。对于分格式上部结构， $r$  为腹板的弯曲刚度与板的横向弯曲刚度的关系式。

$c$  分格式梁的刚度比。只适用于分格式上部结构，为分格式梁抗扭刚度与“梁”的纵向弯曲刚度的关系式。

因为在附录 B 中，对于板式，梁板式和分格式上部结构的基本方程是相似的，就可能导出对于所有三种上部结构类型的一套单一的图表。由于  $f$  和  $r$  的控制项对于构造的不同类型是不相同的，所以在第 10.4~10.6 的图表中分别说明它们的代数定义。

近似的褶皱理论的假定见附录 B。这些假定的某些部分，连同简化运用图表所必须增加的假定均列如下：

(1) 上部结构是直交的和简支的。图表还可以用于连续式上部结构反弯点之间的区段上。

(2) 上部结构是等截面的，即从一端到另一端的截面相同。（若上部结构为变截面，则从近似的使用图表时，取接近跨径中点处的特性是最合适的。）

(3) 板和梁在端部由刚性横隔板来阻止绕纵轴旋转。

(4) 在跨中没有横隔板，或是把这类横隔板假定为沿上部结构“分摊的”。

(5) 上部结构在横贯截面的每一点上有着相同的横向弯曲刚度。因此对于图 10.1 的梁板式上部结构，假定板横跨于“梁”的中心线之间，在该处弯曲刚度和扭转刚度均假定是集中的。同理，对于分格式上部结构假定顶板和底板两者横跨上部结构是连续的，并且只有在其中面处与腹板相连接



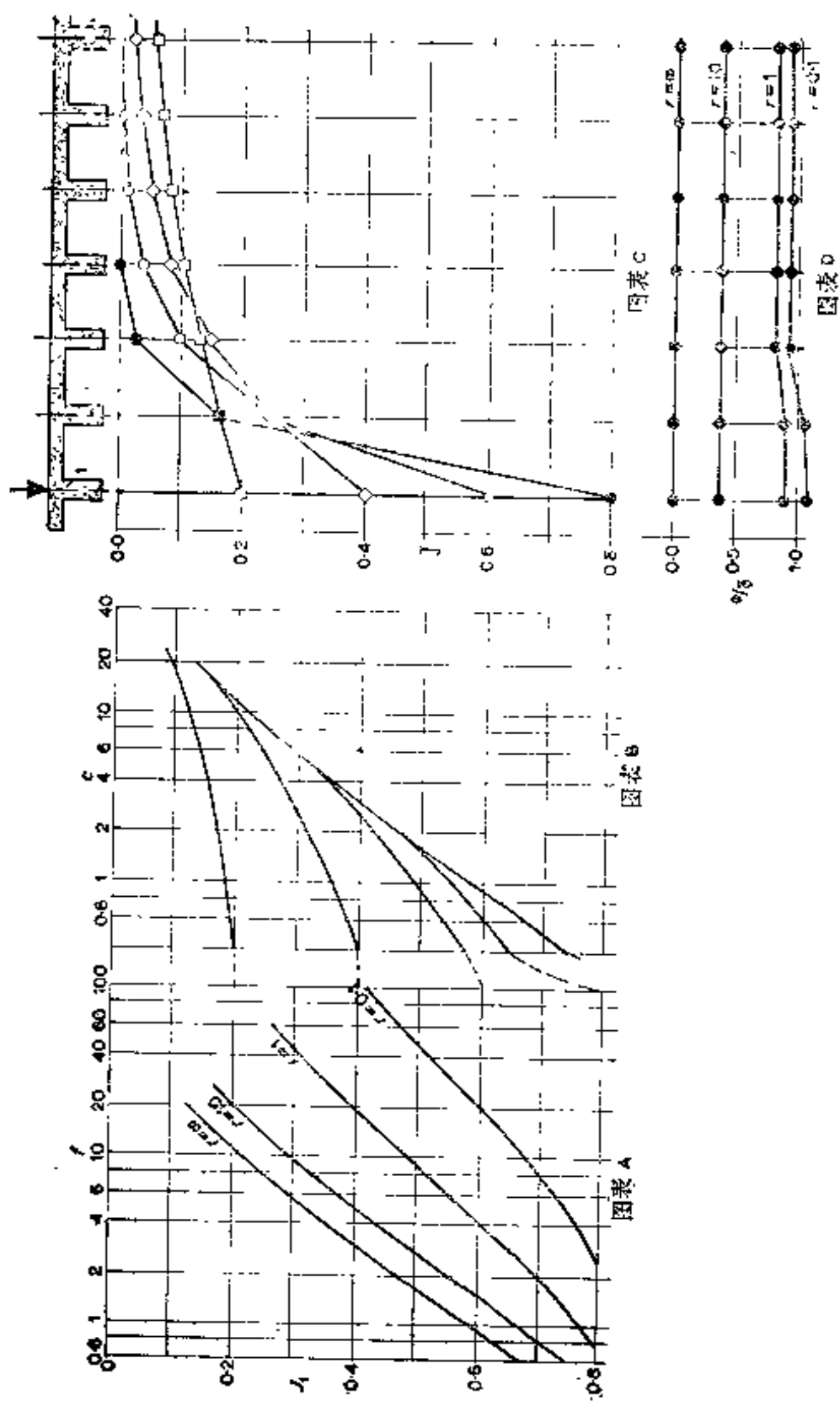


图10.2 边梁影响线

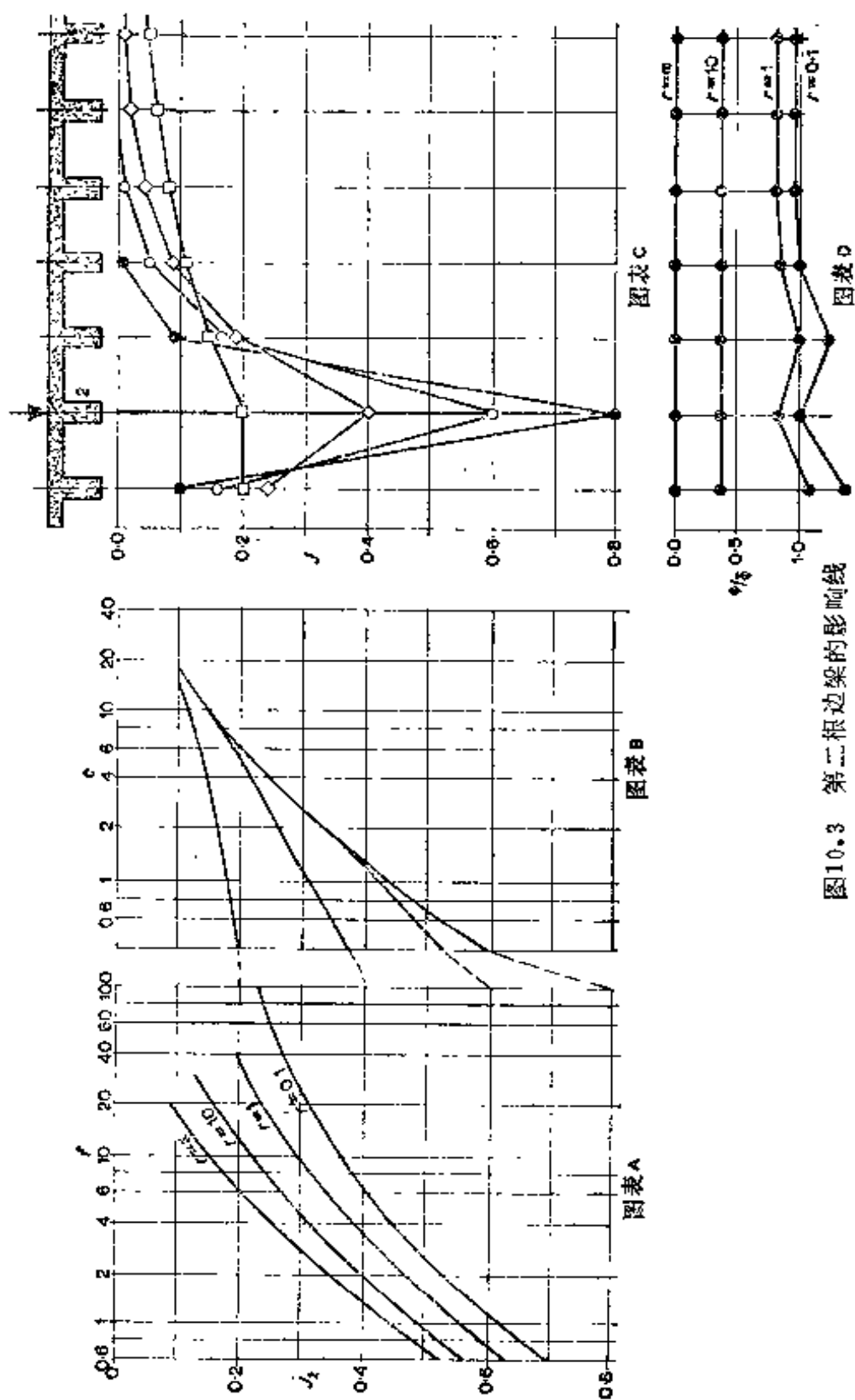


图10.3 第二根边梁的影响线

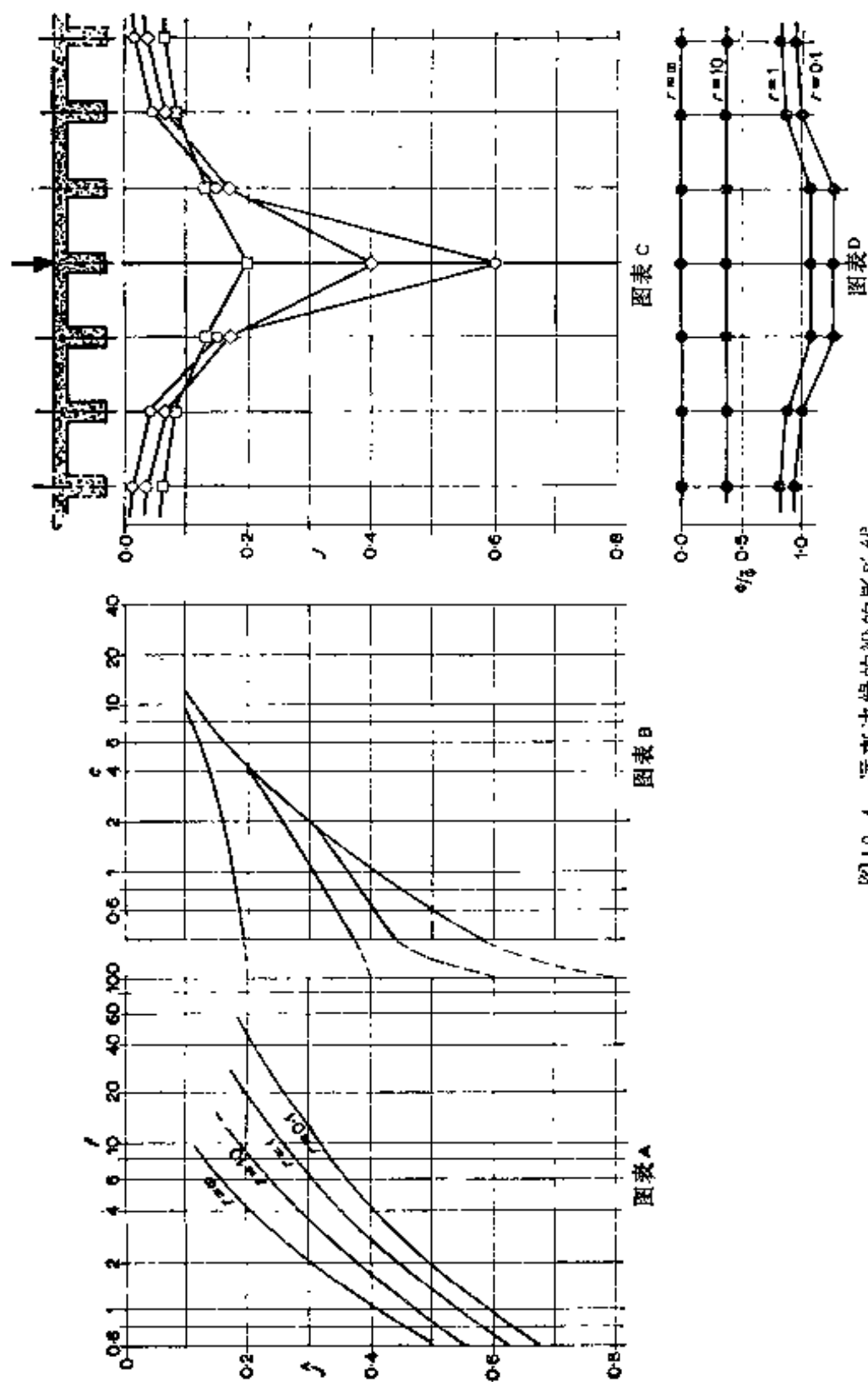


图10.4 远离边缘的梁的影印线

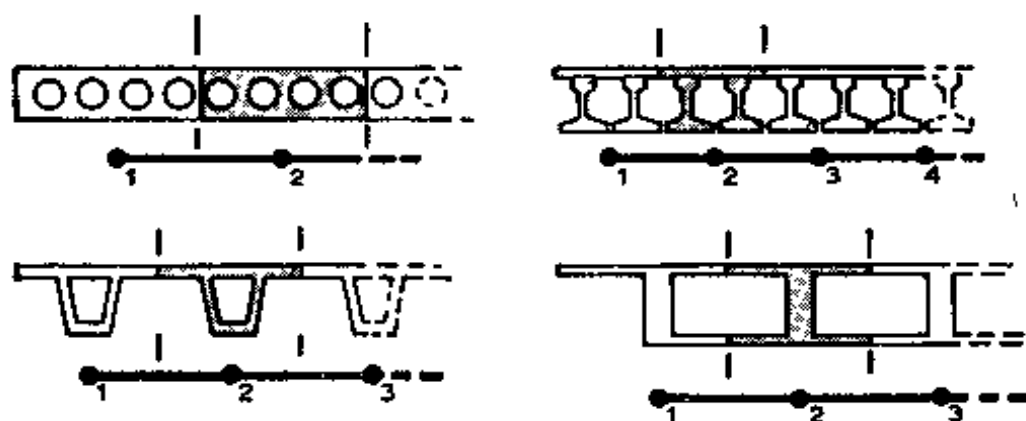


图10.5 上部结构横截面划分成多根的“梁”

(若图表用于分析一个扭转变形的宽箱型梁构成的稀排梁板式上部结构，格室的扭转变形则需要作平面构架的补充分析来决定等效的均匀板。)

(6) 上部结构的横截面，可以分成许多相同的等距离的“梁”。边缘加劲可以考虑为均匀的增加宽度，或重复截面。

(7) 无论在那里，上部结构的形心都在同一水平线上，和平面梁格分析中一样，梁板式上部结构的板的薄膜作用略去不计。

(8) 在分格式上部结构中，每一顶板和底板的弯曲刚度比值在0.3~3之间（若两板相差大于比值，则必须用截面的平面构架分析校核，把原型格室的扭转变形刚度与具有相同几何特性的格室作比较，但该格室具有相同的顶板和底板，它的组合刚度等于原型的刚度）。还假定横截面扭转变形为图10.7b所示，但板没有水平侧向挠度。

(9) 在“梁”中心到“梁”侧的影响线数值考虑作几何级数衰减。换言之，在图10.2~10.4的图表C中每根影响线各点的数值，以几何级数从峰值减少。这个假定以后还要讨论。

图10.2~10.4的图表A和B能够给予使用者从无量纲参数  $f$ ,  $r$  和  $c$  导出特定“梁”的影响线的峰值。图表C系通过峰值来推导影响线的其余部分。沿一根“梁”的影响线上任一点的影响值  $J$  是由于荷载作用在该点在上部结构中的总弯矩，由“梁”所承受的部分。另一方面，可以考虑为“梁”的弯矩（或挠度）表达为总弯矩（或挠度）的分数，好像梁本身所负荷载，而无荷载分布到上部结构的其余梁上。实际上，各种影响线形状不是唯一由峰值来确定的，而其变化则从所假定的几何级数表现为图10.6的形式，然而，由于在线上各点的  $J$  值之和必然为1，则某一点的  $J$  值的微小超估值由其他点的低估值所补偿。设计荷载这样分布到横贯截面上，因而不大可能产生明显的误差。假定的几何衰减的理由，是符合于适应于槽板输出作准备，同时也为影响线值的快速计算创造条件。

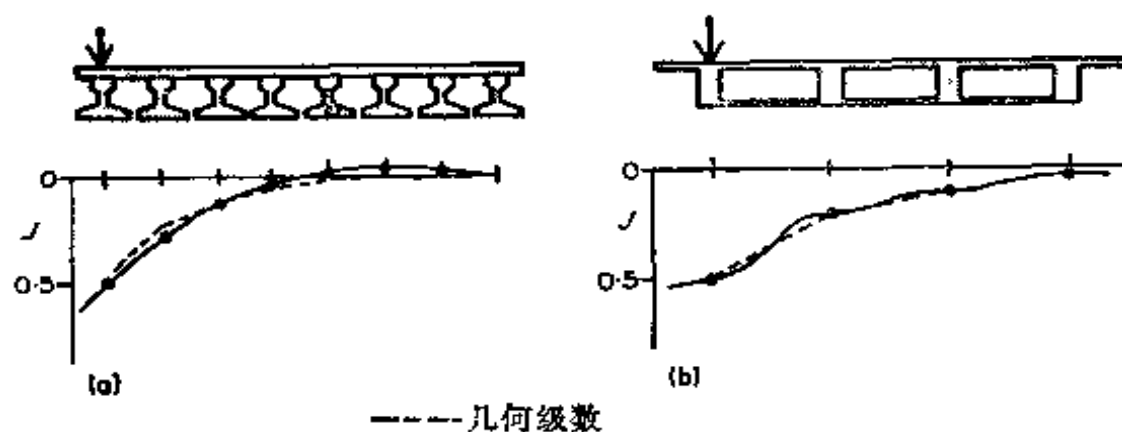


图10.6 从图表查到的影响线近似值

图表C被称之为“影响线”，因为一般来说它较方便的用于此种用途。对于线荷载作用在有关的“梁”上的第一谐波，即为精确的弯矩或挠度的分布值。只要“梁”不是十分靠近，（谐波分布高于第一波的不明显）。互等定理可以应用于梁的弯矩上只有微小的误差，对挠度则相当精确。因

此，图表 C 既可以用于荷载作用于特定“梁”上的弯矩和挠度的分布，也可作为影响线。

分布荷载或接近跨径中点处许多的有关点的荷载所组成的设计荷载，对纵向弯矩来说，多是半临界的。如图表所假定者，横贯上部结构的弯矩和挠度的分布近似接近于第一谐波。但是，在不利的分布荷载（如单独的集中荷载或荷载集中在一端）作用下，弯矩分布可以比第一谐波图表更为不利。为了补偿这个计算上的误差，常将摩利士 (Morice) 和立德尔 (Little) [4] 的设计弯矩提高 10%。

因为对于剪力的临界设计荷载，往往由靠近一端的集中荷载所形成，其分布第一谐波图表更为不利。可以按第 12.3.3 节的提要作出修改，一般较简单的假定仅在跨径 1/4 点之间作用的荷载作分布而那靠近端点就不作分布。

图表 C 为“梁”的位置上每根影响线的值。在“梁”之间的影响线的形状按照转角刚度参数  $r$  而定。若  $r$  是小的图 10.1a 和 b 的上部结构的  $r$  较小，则该上部结构的横截面扭转变形为一光滑的曲线。反之，若  $r$  是大的，如同图 10.1c 和 d 所示上部结构，则扭转变形和影响线为“梯阶”状。“梁”的转角可从图表 D 估算，平均转角  $\bar{\phi}$  则从“梁”的每一侧的相对挠度算得如图 10.7 所示，由此可以得到梁的转角  $\phi$  与平

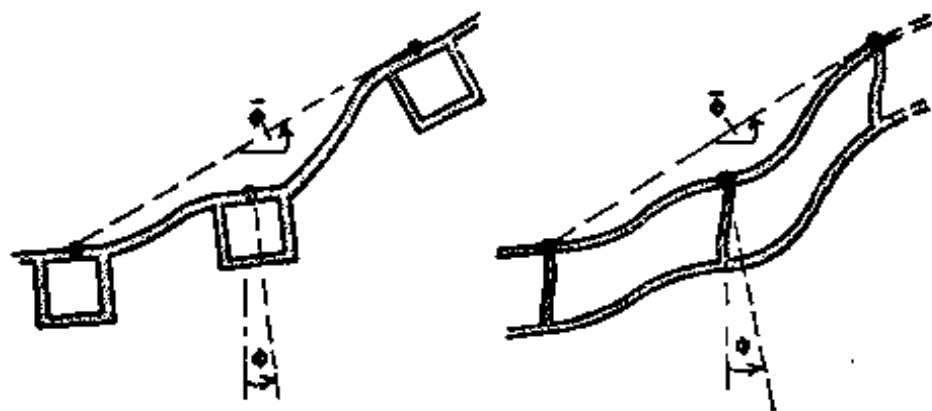


图 10.7 “梁”转角  $\phi$  和平均转角  $\bar{\phi}$  的定义

均转角 $\overline{\phi}$ 比值。在边梁情形， $\overline{\phi}$ 是从边梁和倒数第二根梁的相对挠度计算出来。

## 10.4 应用图表分析板式上部结构

图10.8a和b表示支承着一特种重车的实体板式上部结构。使用图10.2~10.4的图表求横截面各点的弯矩影响线，并求出荷载所引起的弯矩。

上部结构首先假设分成相同的“梁”块（图10.8c）。对于各向同性板，“梁”的最佳宽度为跨度的1/5至1/4。

对于一块各向同性板，正交异性板或梁板式上部结构，无量纲参数为：

$$f = 0.12 \frac{i}{l^3} \times \frac{L^4}{I} \quad (10.1)$$

$$r = 5 \frac{G}{E} \times \frac{l}{i} \times \frac{C}{L^2} \quad (10.2)$$

式中：

$L$  = 跨度；

$l$  = “梁”的间距；

$i$  = 板每单位宽度的横向惯性矩；

$I$  = “梁”的惯性矩；

$C$  = “梁”的抗扭常数 +  $l \times$ （板每单位宽度的横向抗扭常数）。

若板厚为  $d$ ， $\nu = 0.2$ ，则  $G/E = 0.42$

$$f = 0.01 \frac{d^3}{l^3} \times \frac{L^4}{I} \quad (10.3)$$

$$r = 25 \frac{l}{d^3} \times \frac{C}{L^2} \quad (10.4)$$

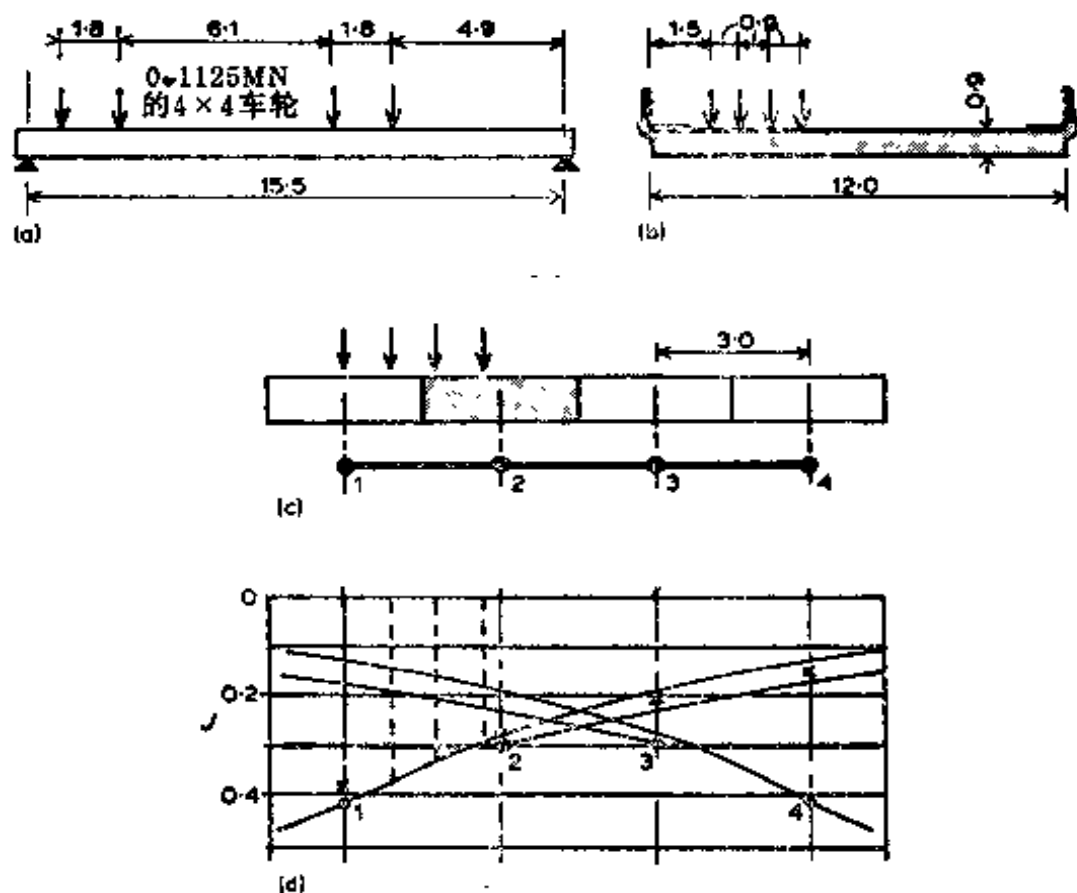


图10.8 板式上部结构影响线

(a)纵剖面；(b)横截面图；(c)分成“梁”块的横截面图；(d)“梁”的影响线

而对于各向同性板

$$I = \frac{ld^3}{12}$$

$$C = \frac{ld^3}{6} + \left( -\frac{d^3}{6} \right) = \frac{ld^3}{3}$$

因而

$$f = 0.12 \frac{l^4}{l^4} \quad (10.5)$$

$$r = 8.4 \frac{l^2}{L^2} \quad (10.6)$$



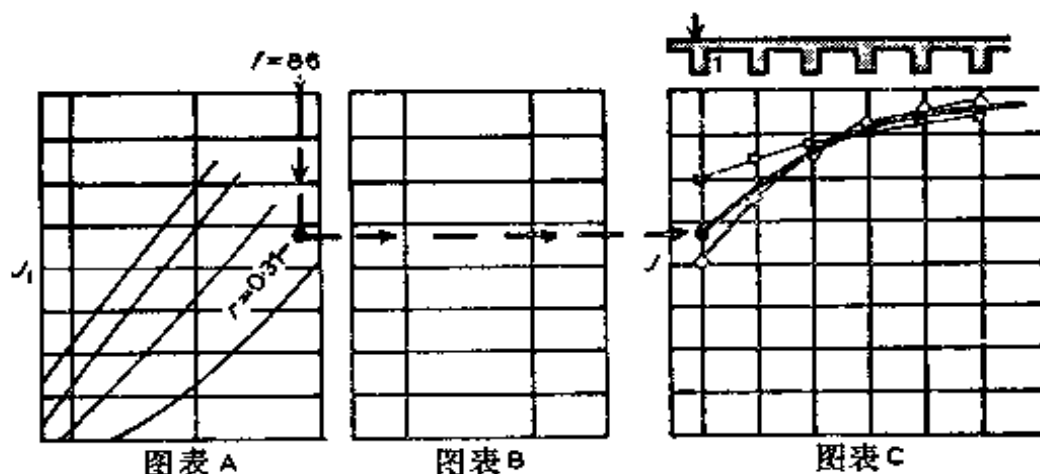


图10.9 对  $f = 86$  和  $r = 0.31$  时图10.2的应用

在本例中,  $L = 15.5$ ,  $l = 3.0$  因而

$$f = 0.12 \left( \frac{15.5}{3.0} \right)^4 = 86$$

$$r = 8.4 \left( \frac{3.0}{15.5} \right)^2 = 0.31$$

图10.9说明利用图10.2求  $f = 86$  和  $r = 0.31$  的边“梁”的影响线的步骤, 即

(1) 确定该点在图10.2中图表A的位置, 即通过  $f = 86$  作垂直线交于  $r = 0.31$  的等值线上。此处座标  $J_1$  等于 0.33, 就是图表C中边梁的影响线座标的峰值。图表B对板式和梁板式上部结构则不考虑。

(2) 在图10.2中的图表C, 通过  $J_1 = 0.33$  内插一根影响线, 它位于大于和小于它的  $J_1$  值之间如图10.9所示, 因而求出所有梁的  $J$  值。

$$\downarrow$$

$$J \quad 0.33 \quad 0.22 \quad 0.15 \quad 0.10 \quad \Sigma = 0.80 \quad (10.7)$$

在宽的上部结构中, 影响线在远端衰减至零, 所有  $J$  值的总和必须等于 1。另外  $J$  值按几何级数衰减。

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = (1 - J_1) \quad (10.8)$$

则将会发现式10.7中相邻值的比值等于  $(1-0.33)$ 。在狭窄的上部结构如本例所示，所有影响线值的总和必须等于 1 而不是如式10.7所表明的0.80。因此式 10.7 的形式必须以  $1/0.80$ 的尺度修正使总和等于 1。

$$\downarrow$$

$$J \quad 0.41 \quad 0.28 \quad 0.19 \quad 0.12 \quad \Sigma = 1.0 \quad (10.9)$$

这就是边梁 1 的影响线值，绘于图10.8d中。

用同样的步骤，使用图10.3求出边缘第二根梁的影响线。由  $f = 86$  和  $r = 0.31$ ，求出  $J_2 = 0.20$ 。从图 10.3 的图表 C 的影响线通过  $J_2 = 0.20$ ，求出其他梁的  $J$  值。

$$\downarrow$$

$$J \quad 0.20 \quad 0.20 \quad 0.15 \quad 0.11 \quad \Sigma = 0.66 \quad (10.10)$$

虽然  $J_1$  必须从图10.3的图表 C 求出（或从边梁影响线上的  $J_2$  用互等定理求出），到  $J_2$  右侧的  $J$  值可以用几何折减系数求出

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{(1 - J_1 - J_2)}{(1 - J_1)} \quad (10.11)$$

这系数与式10.8稍有差别。如前所述，式10.10的  $J$  值对无限宽的上部结构其总和必须等于 1。

$$\downarrow$$

$$J \quad 0.30 \quad 0.30 \quad 0.23 \quad 0.17 \quad \Sigma = 1.0 \quad (10.12)$$

将“梁” 2 的影响线绘于图 10.8d。“梁” 3 和 4 为“梁” 1 和 2 的反型也可同样绘出。虽然这个上部结构无图10.4中相应的内“梁”，此处值得说明在图表C中影响线的几何折减系数具有几何衰减的性质，并且总和等于 1。这系数为

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{(1 - \hat{J})}{(1 + \hat{J})} \quad (10.13)$$

这系数也与式10.8稍有差别。

最靠近跨径中长的轴重下，上部结构横截面由于一行车轮线荷载作用的总弯矩为：

$$\begin{aligned} M &= 0.1125(0.46\text{①} + 1.16 + 3.80 + 2.78) \\ &= 0.9225\text{②} MNm \end{aligned}$$

车轮线荷载重合于“梁”1的影响线上  $J = 0.41, 0.37, 0.33, 0.30$  各点。由于四行车轮线荷载对“梁”1的弯矩为

$$\begin{aligned} M_1 &= 0.9225\text{②}(0.41 + 0.37 + 0.33 + 0.30) \\ &= 1.30 MNm \end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned} M_2 &= 0.9225\text{②}(0.30 + 0.30 + 0.30 + 0.30) \\ &= 1.11 MNm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= 0.9225\text{②}(0.17 + 0.19 + 0.21 + 0.23) \\ &= 0.74 MNm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_4 &= 0.9225\text{①}(0.12 + 0.14 + 0.16 + 0.18) \\ &= 0.55 MNm \end{aligned}$$

用于设计时，这些弯矩应提高10%。

图10.8d还示出由摩利士 (Morice) 和立德尔 (Little) [4] 的荷载分布图表求得的“梁”1的横向影响线。可以看出在“梁”1处，由本书图表所求得者约超过估计值7%，然而，在计算“梁”1的最大活载弯矩则仅超过3%，在活载弯矩与恒载弯矩组合时，这个误差可以略去。因为图表是假定上部结构很宽的条件导出的。从只考虑到狭窄的宽度时，假定影响值的衰减率是与宽阔的上部结构相同时，在偏

① 似应为0.39；

② 似应为0.9146；相应地  $M_1$  为1.129； $M_2$  为1.10； $M_3$  为0.73——译者。

心荷载下,上部结构的横向转角和边梁荷载是超估的。一般来说,对所算得的最大设计弯矩,误差的影响是很微小的,因为它仅影响到横向刚度很大荷载分布良好的狭窄的上部结构。

## 10.5 应用图表分析梁板式上部结构

### 10.5.1 稀排箱型梁

图10.10为预应力箱型梁支承钢筋混凝土板所构成的梁

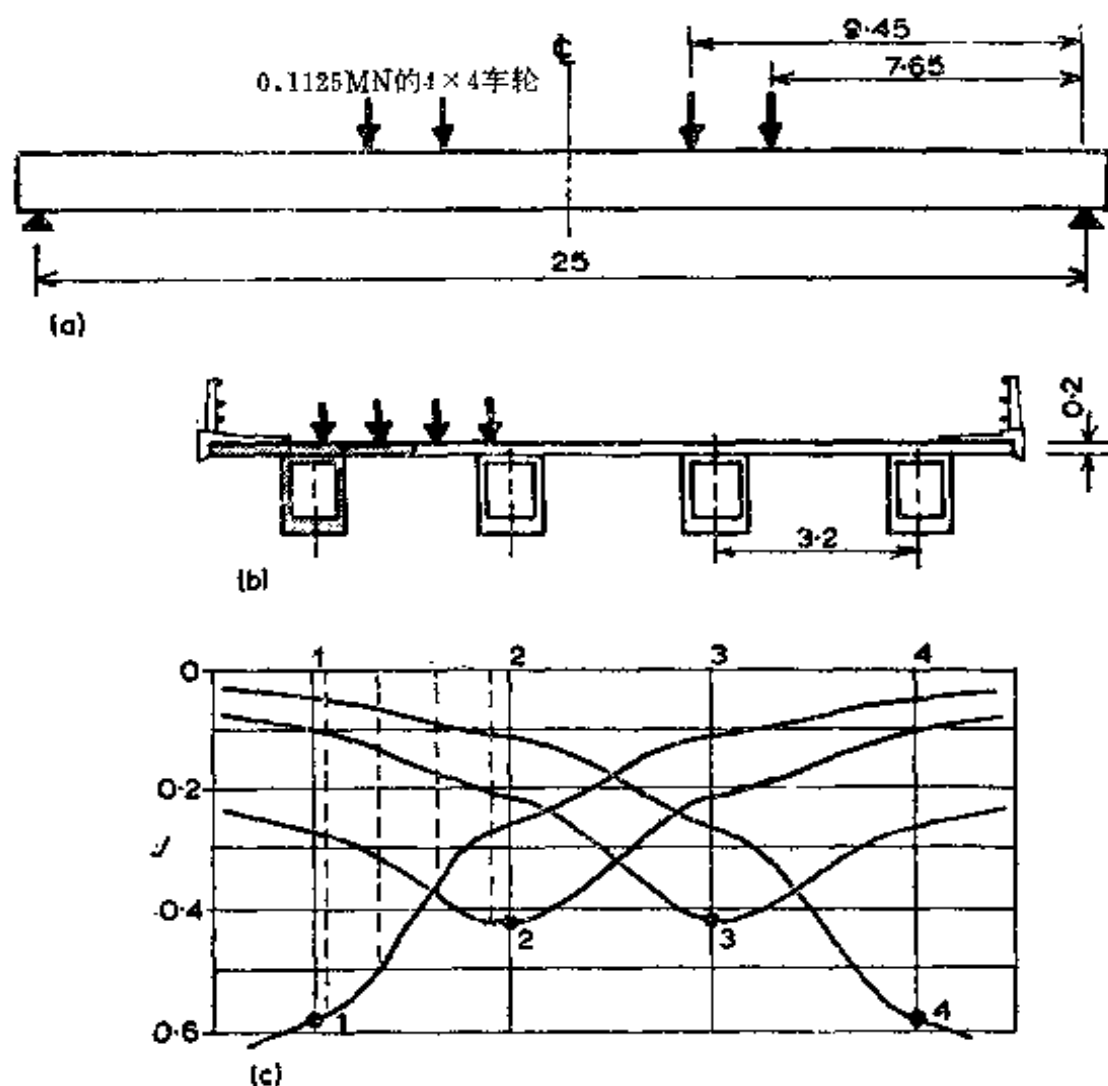


图10.10 梁板式上部结构影响线  
(a)剖面图; (b)横截面图; (c)“梁”的影响线

板式上部结构。位于跨径中点在边梁和第二根边梁之间它承受着特种四轴重车，每一车轴有四个车轮。

钢筋混凝土和预应力混凝土的模量比  $m = 0.8$ 。

分析时，把上部结构分成四根间距  $l = 3.2\text{m}$  的相同的“梁”。对每根“梁”。

$$I = 0.30\text{m}^4$$

$$C = 0.26 + 3.2 \left( \frac{0.8 \times 0.2^3}{6} \right) = 0.26\text{m}^4$$

用  $L = 25.0$  从式10.3和10.4求得

$$f = 0.01 \times 0.8 \times \frac{0.2^3}{3.2} \times \frac{25^4}{0.30} = 2.5$$

$$r = 25 \times \frac{3.2}{0.8 \times 0.2^3} \times \frac{0.26}{25^2} = 5.2$$

按第10.4节所述的图10.2~10.4中的图表，由上述  $f$  和  $r$  值求得：

$$J_1 = 0.55 \quad \text{边“梁”影响线}$$

$$J_2 = 0.39 \quad \text{第二根边“梁”影响线}$$

$$\hat{J} = 0.37 \quad \text{内“梁”影响线。}$$

影响线的几何折减系数从式10.8，10.11和10.13求得：

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = (1 - 0.55) = 0.45 \quad \text{边“梁”影响线}$$

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{(1 - 0.25 - 0.39)}{(1 - 0.25)} = 0.48 \quad \text{第二根边“梁”影响线}$$

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{(1 - 0.37)}{(1 + 0.37)} = 0.46 \quad \text{内“梁”影响线。}$$

使用这些系数或直接从图10.2~10.4的图表 C 查出,求得边梁,第二根边梁的影响线(与内“梁”无关)。

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ J \quad 0.55 \quad 0.25 \quad 0.11 \quad 0.05 \quad \Sigma = 0.96 \quad (10.14) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ J \quad 0.25 \quad 0.39 \quad 0.19 \quad 0.09 \quad \Sigma = 0.92 \quad (10.15) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ (J \quad 0.08 \quad 0.17 \quad 0.37 \quad 0.17 \dots) \quad (10.16) \end{array}$$

式10.14和10.15的影响线值的总和只接近于1,这是因为上部结构荷载分布特性并不良好,上部结构很宽,“梁”1和“梁”2中的弯矩受到荷载或者在远侧其他梁的影响是不太大的。调整式10.14和10.15的系数使总和等于1,则得

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ J \quad 0.58 \quad 0.26 \quad 0.11 \quad 0.05 \quad \Sigma = 1.0 \quad (10.17) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ J \quad 0.27 \quad 0.42 \quad 0.21 \quad 0.10 \quad \Sigma = 1.0 \quad (10.18) \end{array}$$

这些影响线连同相应于“梁”3和4的反型线绘于图10.10c中。

所有箱型梁均有很大的抗扭刚度,因此 $r=5.2$ 。在图10.2~10.4的图表 D 中,可以看出 $r$ 值在所有的“梁”均为 $\phi/\bar{\phi}=0.5$ 时,则表示“梁”的转角约为上部结构在该区域内平均转角之一半。因此,作图10.10c的影响线时,通常使梁的位置的斜度等于通过“梁”侧各点绘出的线的斜度的0.5。例如,用式10.17中的数值求“梁”2的转角为

$$\phi_2 = 0.5 \frac{(0.58 - 0.11)}{2l} \quad (10.19)$$

一般来说,无须计算梁的转角,因为 $\phi$ 可以近似地用肉眼看出等于合适的 $\phi$ 的分数值来绘制。

对于特种重车荷载,每一纵向车轮线荷载的跨中弯矩为

$$M = 0.1125(7.65 + 9.45) = 1.924 \text{ MNm} \quad (10.20)$$

由于车轮线荷载重合于“梁”1、2、3和4的影响线上的数值为：

$$\text{“梁” 1} \quad 0.57 \quad 0.49 \quad 0.35 \quad 0.27$$

$$\text{“梁” 2} \quad 0.28 \quad 0.31 \quad 0.38 \quad 0.42$$

$$\text{“梁” 3} \quad 0.11 \quad 0.13 \quad 0.17 \quad 0.20$$

$$\text{“梁” 4} \quad 0.05 \quad 0.07 \quad 0.09 \quad 0.11$$

在四根“梁”内的总弯矩各为

$$\begin{aligned} M_1 &= 1.924(0.57 + 0.49 + 0.35 + 0.27) \\ &= 3.23 \text{ MNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= 1.924(0.28 + 0.31 + 0.38 + 0.42) \\ &= 2.67 \text{ MNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= 1.924(0.11 + 0.13 + 0.17 + 0.20) \\ &= 1.17 \text{ MNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_4 &= 1.924(0.05 + 0.07 + 0.09 + 0.11) \\ &= 0.62 \text{ MNm} \end{aligned}$$

对于设计，这些弯矩都需要提高10%。

用相同的上部结构承受同样荷载，用梁格分析得到4根梁的弯矩相应为  $3.16 \text{ MNm}$ 、 $2.52 \text{ MNm}$ 、 $1.33 \text{ MNm}$  和  $0.69 \text{ MNm}$ 。

### 10.5.2 密排梁式上部结构

密排梁式上部结构可用一根分析用的“梁”代表一根以上的实际的梁的梁格，用图表或梁格法进行分析。在图10.5所示例题中，每一分析用的“梁”代表两根实际的梁。这种模拟不影响所计算的荷载分布，除非分析用的“梁”总的抗扭刚度很大，足以形成横截面扭转变形为梯阶状（如图10.6b所示）。为了满足这种条件，则

$$r < 0.5$$

或

$$l < 0.02 \frac{d^3 L^2}{C} \quad (10.21)$$

用图表或梁格法分析板式和梁板式上部结构时，上述各梁的间距的限制条件均应适用。

## 10.6 应用图表分析分格式上部结构

图10.11示出一具有薄腹板及厚度不同的顶板或底板的分格式上部结构，顶板和底板的刚度比为：

$$\left( \frac{0.2}{0.15} \right)^3 = 2.4$$

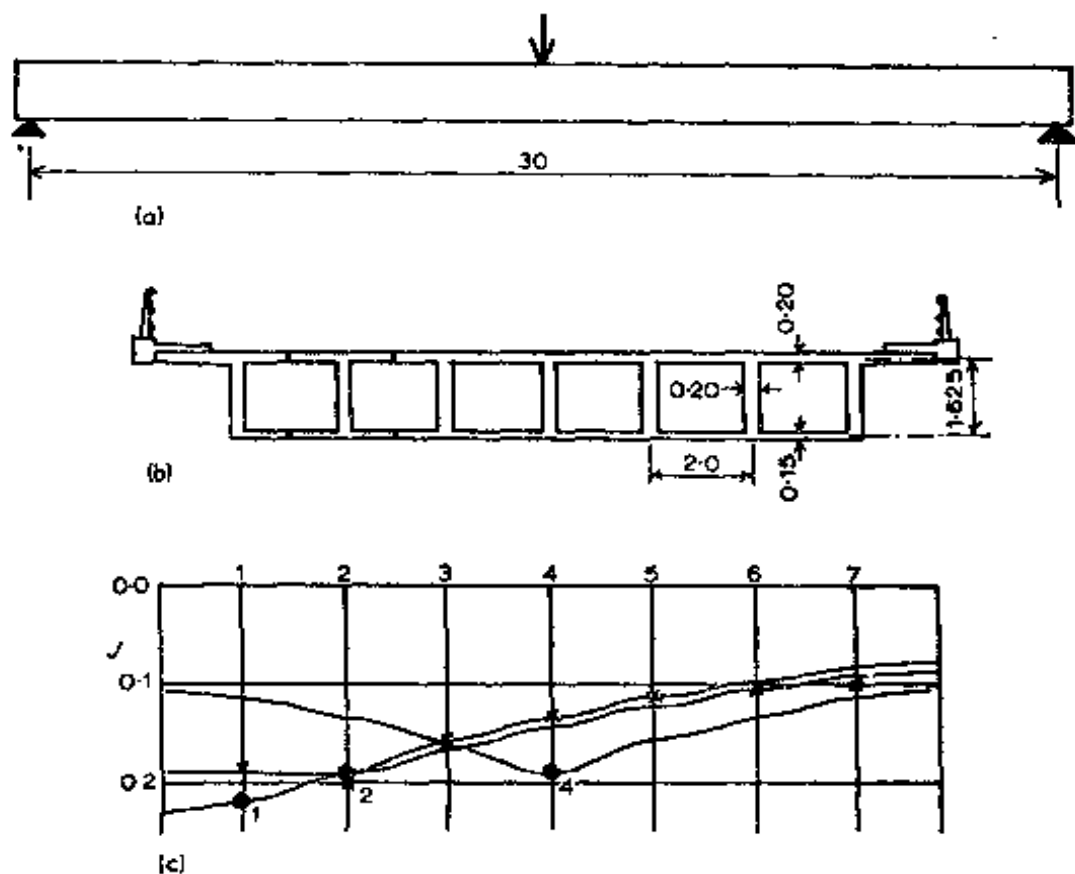


图10.11 分格式上部结构影响线  
(a)正面；(b)横截面；(c)“梁”的影响线



它小于第10.3节中这些图表的极限值。

对于分格式上部结构，无量纲参数为

$$f = 0.12 \frac{i}{l^3} \times \frac{L^4}{I} \quad (10.22)$$

$$r = 6 \frac{i_w}{i} \times \frac{l}{h} \quad (10.23)$$

$$c = 0.1 \frac{G}{E} \times \frac{I_s}{I} \times \frac{L^2}{l^2} \quad (10.24)$$

式中：

$L$  = 跨度；

$l$  = “梁” 间距 = 腹板间距；

$I$  = “梁” 的惯性矩；

$I_s$  = 两腹板间的面板绕上部结构中中性轴的惯性矩；

$i$  = 顶板和底板每单位宽度本身的惯性矩总和；

$i_w$  = 腹板每单位长度的惯性矩；

$h$  = 面板中面间的腹板高度。

在本例中，

$$L = 30.0m$$

$$l = 2.0m$$

$$I = 0.51m^4$$

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{2.0 \times 1.625^2 \times 0.2 \times 0.15}{(0.2 + 0.15)} \\ &= 0.45m^4 \end{aligned}$$

$$i = \frac{0.2^3}{12} + \frac{0.15^3}{12} = 0.00095m^4m^{-1}$$

$$i_w = \frac{0.2^3}{12} = 0.00067m^4m^{-1}$$

$$h = 1.625m$$

边梁绕上部结构主轴的惯性矩比内梁略小。差别是不明显的。然而，如用梁格分析，弯曲应力必须用荷载分布时所假定的惯性矩来计算。

用  $v = 0.15$

$$\frac{G}{E} = 0.435$$

因而

$$f = 0.12 \times \frac{0.00095}{2.0^3} \times \frac{30^4}{0.51} \\ = 23$$

$$r = 6 \times \frac{0.00067}{0.00095} \times \frac{2.0}{1.625} \\ = 5.2 \quad (10.25)$$

$$c = 0.1 \times 0.435 \times \frac{0.45}{0.51} \\ \times \frac{30^2}{2^2} = 8.6$$

利用图10.2~10.4图表中的三个参数时，将图10.2重绘于图10.12中。

(1)按图10.2求点时，在图表A中，由 $f = 23$ 作垂直线交于 $r = 5.2$ 的等值线上。

(2)横移图表A至右边缘，然后在图表B上沿内插的等值线直至交于通过 $c = 8.6$ 的垂线。 $J_1$ 的座标0.15是图表C内梁的影响线座标的峰值。在图表B内沿等值线移动，则影响值 $J_1$ 的折减为由于分格式梁扭转的荷载分布。

(3)在图表C上通过 $J_1 = 0.15$ ，在大于和小于 $J_1$ 之间内插一根影响线，在此， $J_1$ 小于最低的线，因而远离“梁”的衰减值必须用式10.8的几何折减系数计算，即

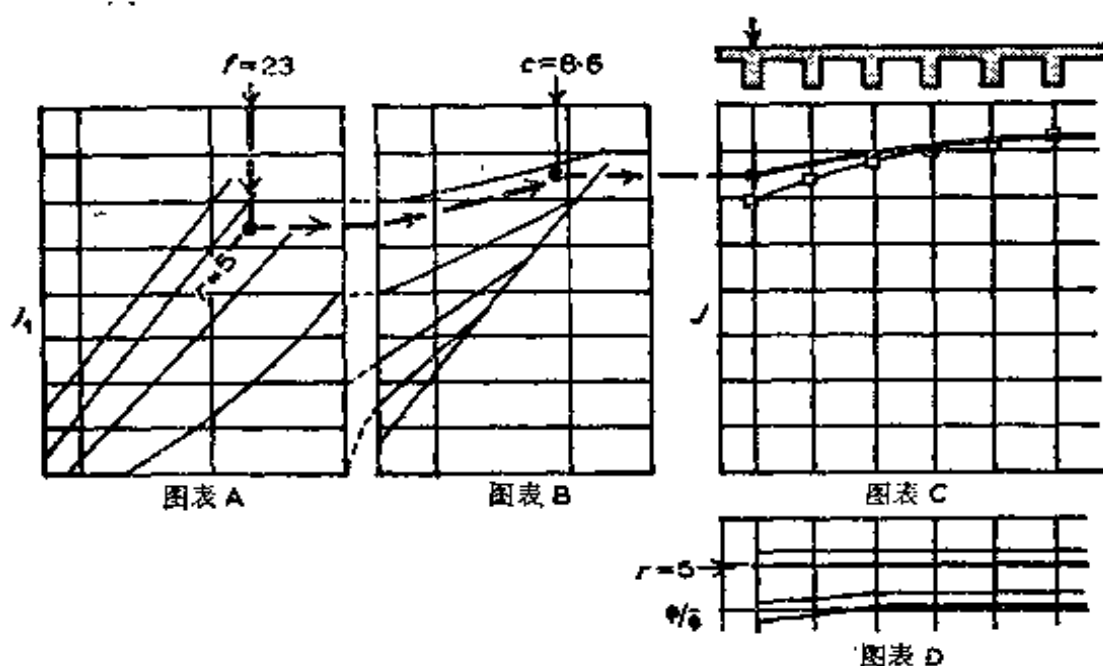


图10.12 对  $f=23$ ,  $r=5.2$  和  $c=8.6$  时图10.2的应用

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = (1 - 0.15) = 0.85$$

因而对于边“梁”的影响线为

$$\begin{array}{cccccc}
 J & 0.15 & 0.128 & 0.108 & 0.092 & 0.078 & 0.066 \\
 & 0.057 & \Sigma = 0.679 & & & & (10.26)
 \end{array}$$

同理，应用图10.3和10.4可得：

距边缘的第二根“梁”  $J_2 = 0.12$

内“梁”  $\hat{J} = 0.09$

从式10.11和10.13，相应的几何折减系数为：

距边缘的第二根“梁”

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{(1 - 0.12 - 0.12)}{(1 - 0.12)} = 0.86$$

内“梁”

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{(1 - 0.09)}{(1 + 0.09)} = 0.83$$

由此可计算“梁”2“梁”4的影响线值。

$$\begin{array}{cccccc} & & \downarrow & & & \\ J & 0.120 & 0.120 & 0.104 & 0.090 & 0.077 & 0.067 \\ & 0.058 & \Sigma = 0.636 & & & & \end{array} \quad (10.27)$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & \downarrow & & \\ J & 0.052 & 0.063 & 0.075 & 0.090 & 0.075 & 0.063 \\ & 0.052 & \Sigma = 0.47 & & & & \end{array} \quad (10.28)$$

式10.26~10.28必须调整，使其总和等于1，即

$$\begin{array}{cccccc} & \downarrow & & & & \\ J & 0.22 & 0.19 & 0.16 & 0.14 & 0.11 & 0.10 \\ & 0.08 & \Sigma = 1.0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & \downarrow & & & \\ J & 0.19 & 0.19 & 0.16 & 0.14 & 0.12 & 0.11 \\ & 0.09 & \Sigma = 1.0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & \downarrow & & \\ J & 0.11 & 0.13 & 0.16 & 0.19 & 0.16 & 0.13 \\ & 0.11 & \Sigma = 1.0 & & & & \end{array}$$

这些影响线绘于图10.11c中。因为参数 $r$ 等于5.2，在最后的例题中，图10.2~10.4的图表D为 $\phi/\bar{\phi} = 5$ 。因而影响线成梯阶状如同在最后的例题所示。“梁”的转角约等于“梁”的两侧间平均转角之半。

如前述两例所示，影响线可用于计算在同样状态下的弯矩。

上例的上部结构，按大小比例仅与绍柯 (Sawko) [10] 所发表的透明塑胶模型稍有差别。模型跨径为36.8英寸，有6个内尺寸为2×2英寸的格室，所有板厚为0.25英寸，由此

可得,  $f=31$ ,  $r=3$ ,  $c=8.6$ ; 由这些无量纲参数, 利用图表得到与上例相同的影响线和挠度分布。因此, 图10.11c各线还可考虑作为模型挠度外形的图表估算值。绍柯(Sawko)发表了有限元分析的估算值, 对于距边缘的第二块腹板上有荷载的挠度纵剖面示于图10.11c中。显然图表的估算值是非常接近的。

### 参考文献

1. Pucher A. (1964), *Influence Surfaces of Elastic Plates*, Springer Verlag, Wien and New York.

2. Rusch, H. and Hergenroder, A. (1961), *Influence Surfaces for Moments in Skew Slabs*, Technological University, Munich. Translated from German by C. R. Amerongen, London, Cement and Concrete Association.

3. Balas, J. and Hanuska, A. (1964), *Influence Surfaces of Skew Plates*, Vydaratelstvo Slovenskej Akademie Vied, Bratislava.

4. Morice, P. B. and Little, G. (1956), *Right Bridge Decks Subjected to Abnormal Loads*, Cement and Concrete Association, London.

5. Rowe, R. E. (1962), *Concrete Bridge Design*, C. R. Books, London.

6. Cusens, A. R. and Pama R. P. (1971), "Design curves for the approximate determination of bending moments in orthotropic bridge decks", Civil Engineering Department, University of Dundee.

7. Idem, (1970), "Design curves for the approximate determination of twisting moment and longitudinal shear in orthotropic bridge deck's, civil Engineering

Department, University of Dundee.

8. Department of the Environment (1973), "Bridge Deck Design Charts for Orthotropic right bridge decks," Highway Engineering Computer Branch HECB/BI /5.

9. Department of the Environment (1970), Ministry of Transport Technical Memorandum, Shear key Decks, Annexe to Technical Memorandum (Bridges), No. BE 23.

10. Sawko, F. (1968), 'Recent developments in the analysis of steel bridges using electronic computers', BCSA Conference on steel Bridges, London, June, pp. 39-48.

# 第十一章 温度与预应力荷载

## 11.1 引言

这章介绍在桥梁上部结构温度荷载与预应力的作用，并表明这些荷载可以按概括在前几章所述的方法去模拟。虽然，温度荷载与预应力在下面将逐一描述，但着重强调这两种荷载型式的明显不同的原理。

## 11.2 简支跨径内温度应变与应力

在材料单元内如果无约束，由于温度的升高，就引起单元伸长。另一方面，若单元伸长受到阻碍，温度的升高就引起与材料的杨氏模量有关的应力的增加。不论应变增加或应力增加对于结构内温度应力分配的计算可以取一开始点，作为结构内温度应力分布的依据。对顶面和底面温差为线性变化的简支上部结构，计算弯曲的最简单方法是按温度一感应的自由应变计算。然而，对于较普通的桥梁，当它具有复杂的上部结构几何性和非线性温度分配的问题，而且在整个上部结构受有刚性约束时，最简单的方法是从假定上部结构受到应力作用的温度变化开始的，然后再计算撤除理论约束的效应。

图 11.1a 示出一具有非线性温度分布的单元，该分布从顶面  $+21^{\circ}\text{C}$  通过 0 到背面处变为  $+7^{\circ}\text{C}$ （对于特定桥梁温度

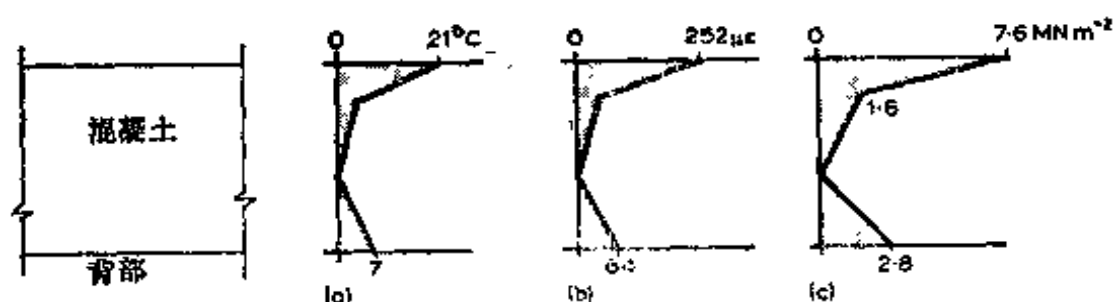


图11.1 板式上部结构内温度效应

(a)温度分布；(b)无约束梁片内的应变；(c)有约束梁片内的应力

分布，假设是由热流计算或设计规范确定的）。

若热胀系数为  $\alpha$ ，则无约束热应变为：

$$\text{伸长 } \epsilon = \alpha \Delta T \quad (11.1)$$

若  $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ，图11.1a的温度在上部结构无约束梁片内引起应变，如图11.1b所示。随着这种应变，平面截面不再保持平面。

如果伸长受到阻碍，而平面截面保持着平面，则锁住应力为：

$$\text{受压 } \sigma = \alpha E \Delta T \quad (11.2)$$

式中： $E$ 为杨氏模量。

对于  $E = 30000 \text{ MNm}^{-2}$ ，图11.1a所示温度在上部结构有刚性约束的梁片（图11.1c）内所引起的内应力。

应注意到：图11.1b的应变和图11.1c的应力是两个依赖边界条件的温度变化基本效应。基本应力和应变不按虎克定律成比例，应力大而应变保持小，反之亦然。温度效果为“隙缝”或“顶压”。

相反，如果材料是弹性的，由于主要弯矩的重分布引起的次应力和应变则与虎克定律有关。

图11.1c的锁住应力分布（再示于图11.2a中）可以考虑为两部分的组合，这两部分以不同的方式影响结构：



(1) 示于图11.2b 中的平均压应力引起在横截面上的合力  $P$ 。

(2) 示于图11.2c 中的非线性应力分布，它包括一力矩  $M_T$  和无净合力的残余应力。

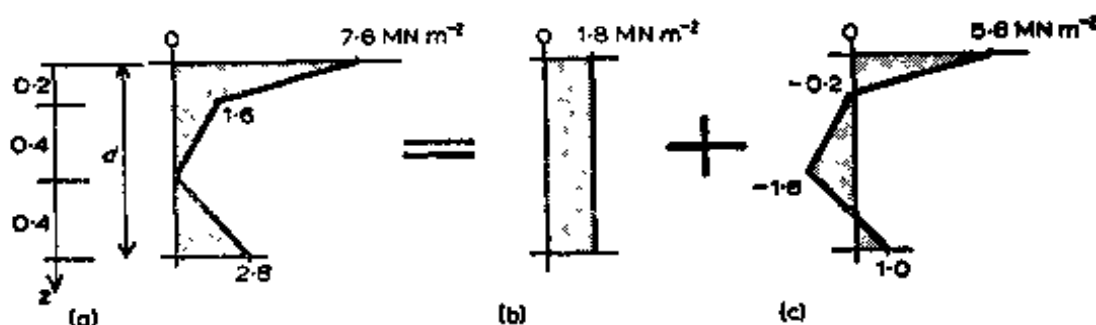


图11.2 在受约束的上部结构内温度应力

a) 受约束梁片内的应力(与图11.1c同); b) 压力  $P$ ; c) 约束力矩  $M_T$  和残余应力

对在图11.2a 的特定应力中, 图11.2b 的平均压应力则为:

$$\bar{\sigma} = \int_0^d \frac{\sigma b dz}{\text{面积}} \quad (11.3)$$

式中:  $b$  = 宽度。

此处

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \frac{1}{1.0} & \left[ -\frac{(7.6 + 1.6)}{2} \cdot 0.2 + \frac{(1.6 + 0)}{2} \cdot 0.4 \right. \\ & \left. + \frac{(0 + 2.8)}{2} \cdot 0.4 \right] = 1.8 \text{ MN m}^{-2} \end{aligned}$$

简单地说, 图11.2c 是图 a 减去图 b 的平均应力。

当上部结构某一长度受刚性约束(如图11.3a)时, 则有图11.2a 的应力作用在每一个横截面上。在内部横截面上, 两侧应力平衡, 因此, 只有在端面上这些应力必须由外部作用的约束力来平衡。当把纵向延伸的约束移去, 如图11.3b, 则上部结构伸长并且图 11.2b 的压应力受到放松。唯独图

11.2c 的力矩和残余应力仍然存在。当力矩的约束撤去（如图11.3c 所示）后，则上部结构就受弯曲。实际上，约束力矩由导致弯曲的相等而反向的放松力矩所抵销。约束（以及反向放松）力矩的值等于图11.2c（绕任一点）的应力图的力矩：

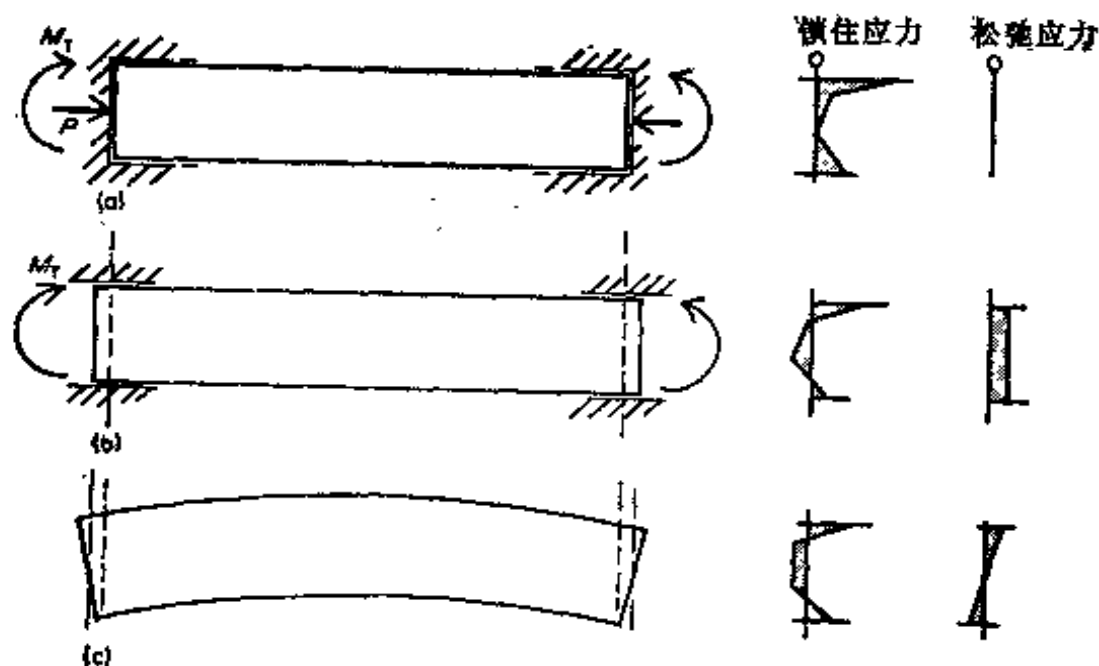


图11.3 温度力的逐步放松  
(a) 完全约束；(b) 压缩放松；(c) 弯曲放松

$$M = \int_0^d \sigma b z dz \quad (11.4)$$

此处：

$$\begin{aligned} M &= \frac{5.8}{2} \times 0.193 \times 0.064 - \frac{0.2}{2} \times 0.007 \times 0.198 \\ &\quad - \frac{(0.2 + 1.8)}{2} \times 0.4 \times 0.45 - \frac{1.8}{2} \times 0.26 \\ &\quad \times 0.69 + \frac{1.0}{2} \times 0.14 \times 0.95 \\ &= -0.27 \text{ MNm}^{-1} \text{ 宽度} \end{aligned} \quad (11.5)$$

由放松力矩引起的应力和应变与虎克定律有关，即为在第二和第三章内所述的弹性的性能。特别是，应力分布是线性（如图11.4b所示）时，则与  $M$  有关的应力为：

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad (11.6)$$

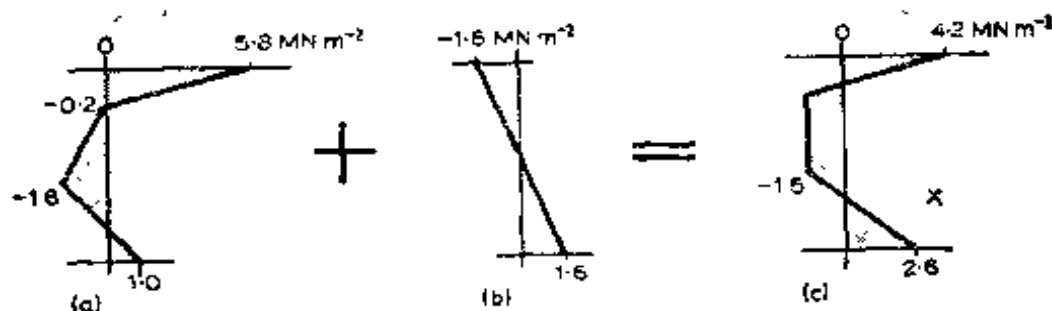


图11.4 温度力矩和残余应力

(a)约束力矩  $M_T$  和残余力（与图11.2c相同）；(b)放松力矩  $M_T$ ；(c)残余力

对于矩形梁， $Z = bd^2/6$ ，因而由于  $M = -0.27$  在图11.4b中表面上引起应力松弛，即为：

$$\sigma = -\frac{0.27}{1^2/6} = -1.6 \text{ MN m}^{-2}$$

当把图11.4b的松弛应力分布加到图11.4a的约束应力上，则得图11.4c的残余应力分布。这样，用式11.3和11.4校核时则净压力或弯矩就没有了。

图11.4c所示残余应力为简支桥横截面上温度感应的应力最后分布值。由于温度分布为非线性，即使上部结构是简单支承，而最大应力却是很大的。只有温度分布为线性时，在图11.4a中，它引起的应力亦为线性，因此当由相等而反向的图11.4b的线性应力分布引起松弛时，在截面上的残余应力图11.4c就不再存在。

在上部结构端面处，残余的温度应力没有由外力所抵

抗, 结果, 由于局部弹性扭转变形作用, 这些力在沿上部结构的长度约等于截面高度的局部范围内引起重分布。这个重分布值带来很大的局部纵向剪力, 这些剪力把在端部接近顶面和底面处的残余压力传递至中部变换为反向残余拉力。在本例中, 图11.4c 的残余压力在 X 水平线下为

$$-\frac{2.6}{2} \cdot \times 0.25 = 0.33 \text{ MNm}^{-1} \text{ 宽度}$$

因而, 在接近上部结构端部 X 水平线处纵向剪力也是  $0.33 \text{ MNm}^{-1}$  宽度。

在上例中假定上部结构在所有水平面上有相同的宽度。若上部结构的梁宽  $b$  是随高度变化的, 则  $b$  的变化值要计入在式11.3和11.4内。

### 11.3 连续式上部结构内的温度应力

连续式上部结构内的温度应力的松弛仅较简支者稍为复杂些。图 11.5a 示出一座三跨上部结构, 它完全受到锁住的非线性温度分布的约束。

假设在所有跨径纵向上能自由伸长, 则图11.2b 的平均温度压应力引起的压力就被放松。图11.5b 示出每跨受约束的温度力矩, 它相似于图11.3。因为内支点的两侧力矩平衡, 如图11.5c所示, 在内支点处无约束以及没有发生松弛情况下有可能把各跨联结一起。换言之, 只有在上部结构端部需要对弯矩加以约束, 使这一连续式上部结构能抵抗温度弯曲。这些端部约束弯矩的松弛由相等而反向的松弛弯矩叠加而成, 如图11.5d 所示。比照简支桥跨, 当承受端部松弛弯矩时, 跨间具有均匀弯矩而起拱, 而连续式上部结构则按照第二章连续梁理论而分布松弛弯矩 (如图11.5d 所示)。

结果，沿上部结构，把图11.4c 的均匀的约束温度弯矩与图11.5d 的变化的松弛弯矩两者产生的应力作叠加就得到沿上部结构各点的不同应力分布。

在端跨的端部，松弛弯矩等于约束温度弯矩但反向，而应力分布与图11.4c 相同。然而，在邻近的支点上，例如图11.5d 中的“松弛弯矩”却与端部支点的弯矩符号相反，因此约束温度弯矩得不到平衡，而事实上在组合后使顶部应力增加（如图11.6所示）。

若上部结构的截面沿其长度变化或者温度分布沿上部结构改变，则约束温度弯矩亦沿上部结构作改变。图11.7示出代表一加腋式上部结构的两种比较方案。若上部结构由许多不同截面的均匀梁段连接组成如图11-7b 的左侧，则温度弯曲将受各梁段内不同弯矩约束。当各梁段连接如图11.7c 时，弯矩在内连接处是不平衡的。作用于连续式上部结构的松弛

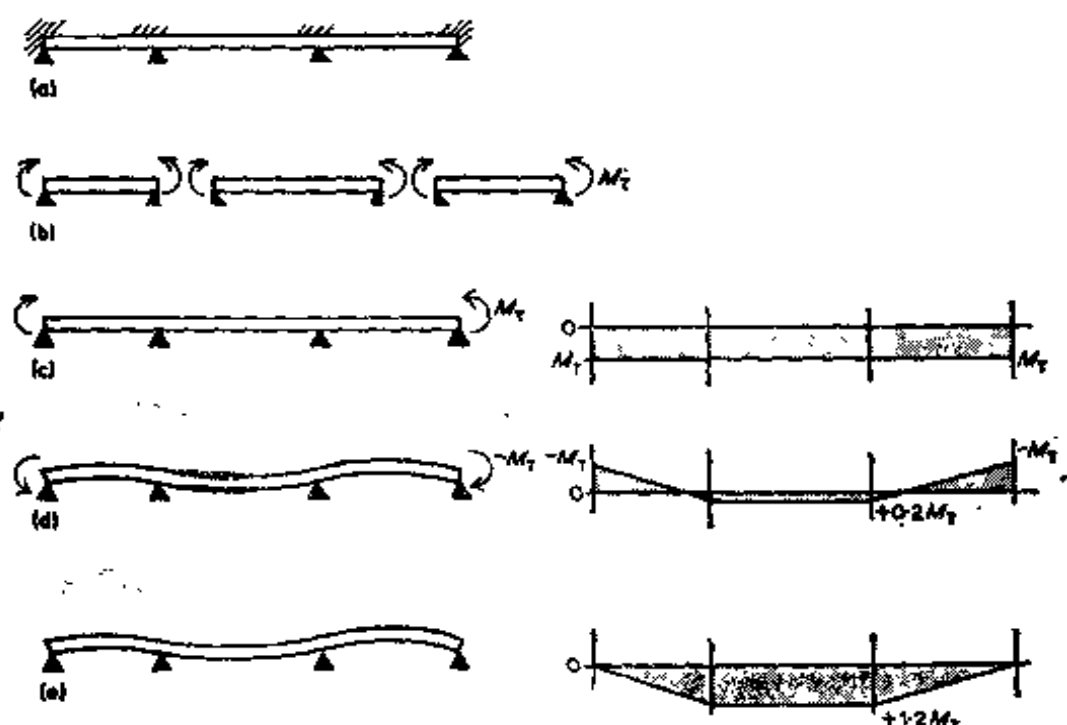


图11.5 连续式上部结构内温度弯矩的放松

(a)受约束的上部结构；(b)每跨内受约束的弯矩；(c)连接跨内的受约束弯矩；(d)松弛弯矩；(e)最后弯矩 = c + d

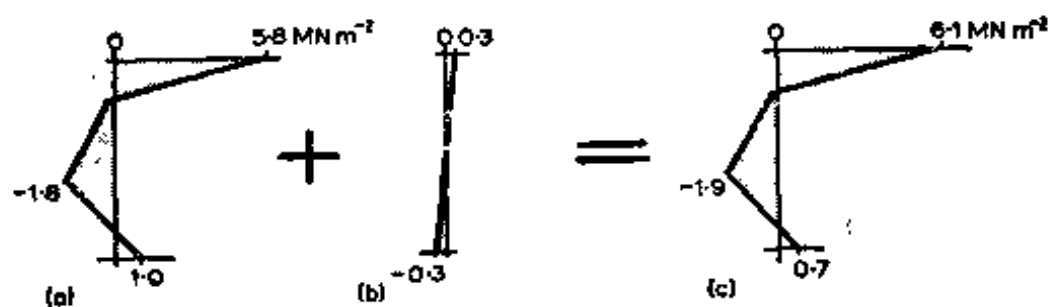


图11.6 图11.5的连续式上部结构内支点处温度应力  
(a)约束弯矩 $M_T$ 及残余应力(与图11.2c同); (b)松弛弯矩 $=0.2M_T$ ;  
(c)总应力

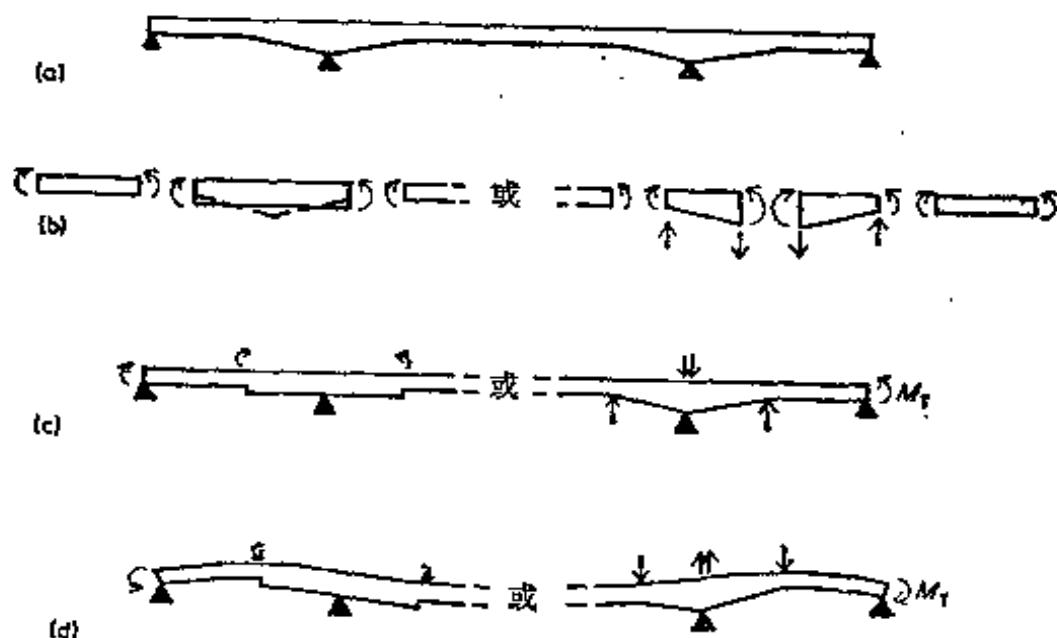


图11.7 加腋式上部结构温度弯矩的放松  
(a)上部结构正面; (b)每跨上的约束温度力; (c)连接跨上的约束温度力; (d)松弛弯矩

弯矩一定要抵销外约束温度弯矩, 因而不平衡弯矩必须作用在连续式上部结构的截面改变处(如图11.7c所示)。另外, 若梁段是变截面的, 则在其两端的约束温度弯矩是不相同的。为了保持平衡, 在梁段的两端必须施加反方向的垂直力, 如图11.7b右边所示(这剪力是与沿变截面梁段作用的均布弯矩静力等效的)。当梁段被连接一起时, 约束温度弯

矩在连接处就平衡，但仍保持有垂直约束力。因此，对于分布来说，作用到连续梁上的抵销松弛力要计入变截面梁段端部的垂直力以及端支点处的弯矩。

在宽桥中纵横两个方向受到阻碍的单元的热伸长应力，在两个方向上的性能是相同的。若泊松比是大的，则必须研究在这两个方向上的应力和弯曲的相互影响，但这很复杂而超出本章的范围。

## 11.4 温度弯矩的梁格分析

用梁格法分析二维上部结构的温度弯矩分布，在原理上是与第11.3节中连续梁相同的。图11.8示出一两跨斜交式上部结构的梁格。约束温度弯矩和在每根单元梁上的抵销弯矩与图11.5b中的单元上的弯矩相同。当单元相连时，只有不平衡弯矩（和力）仍然作用于节点上。在本例中假定板式上部结构是均匀的，因而在单元梁的内节点两侧的弯矩是相互抵销的。在边缘处，尽管弯曲受到约束，但图11.4a的温度感应的应力必须由相等而反向的外力所抵抗。当这些弯矩由松弛弯矩所抵销时，它们仅剩作用在上部结构边缘的力（如图11.8所示）。松弛弯矩不均匀遍布在整个上部结构如图11.5d所示的连续梁内一样，而精确的分布就必须从梁格分析求得。在任一点的最后应力，则由梁格输出弯矩所计算的应力与图11.4a的约束温度应力简单叠加而求得。

在具有少数横隔板的宽的多格式上部结构，在远离横隔板的顶板和底板，除在腹板的平面外弯曲外，在桥面内的伸缩受到的阻力很小。如果要对这种上部结构或其他复杂结构的温度应力作详细的研究，那就需要作三维分析。大多数三维结构分析程序能将构件温差功能直接输入，而使用者无须

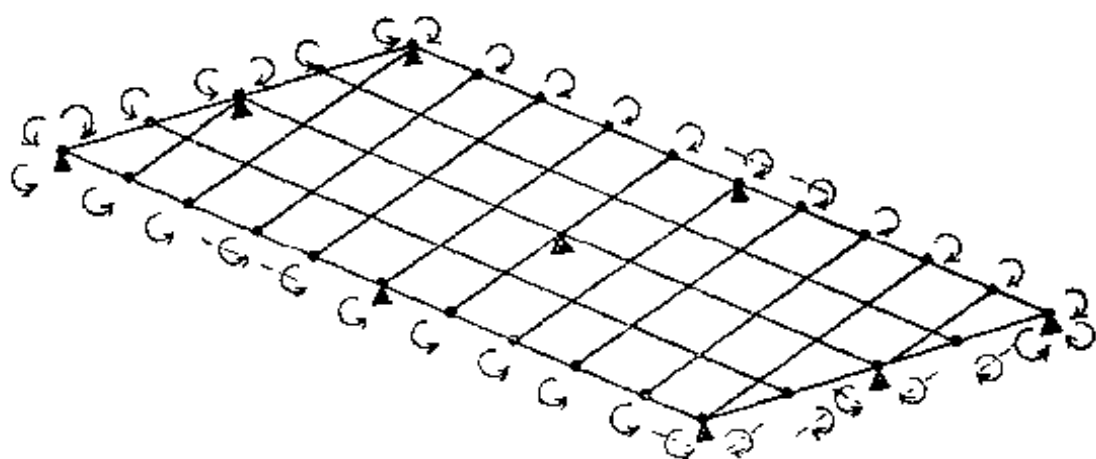


图11.8 作用于梁格的松弛弯矩

计算不协调等效荷载。

## 11.5 徐变和收缩

结构的徐变或收缩的物理作用与受温度作用相同。若上部结构的梁片没有约束，徐变和收缩将以图11.1b 的温度相同的方式在梁片内引起不均匀的应变。唯一的差别是徐变和收缩的应变图通常成梯阶状，还有，若梁片是受刚性约束，则徐变和收缩往往引起拉应力分布（如图11.1c 温度压力相似），并具有等于杨氏模量 $\times$ 自由状态下的徐变和收缩应变值所生的拉应力。在相同的状态内，二次弯矩的分布计算与温度弯矩同。

## 11.6 预应力轴向压缩

在混凝土桥梁上部结构中，预应力索使混凝土经受三种不同的荷载方式，表示于图11.9中：

（1）在混凝土内由于索的锚固力或摩阻力作用到混凝土上的压力引起的轴向压缩，如图11.9a 所示；



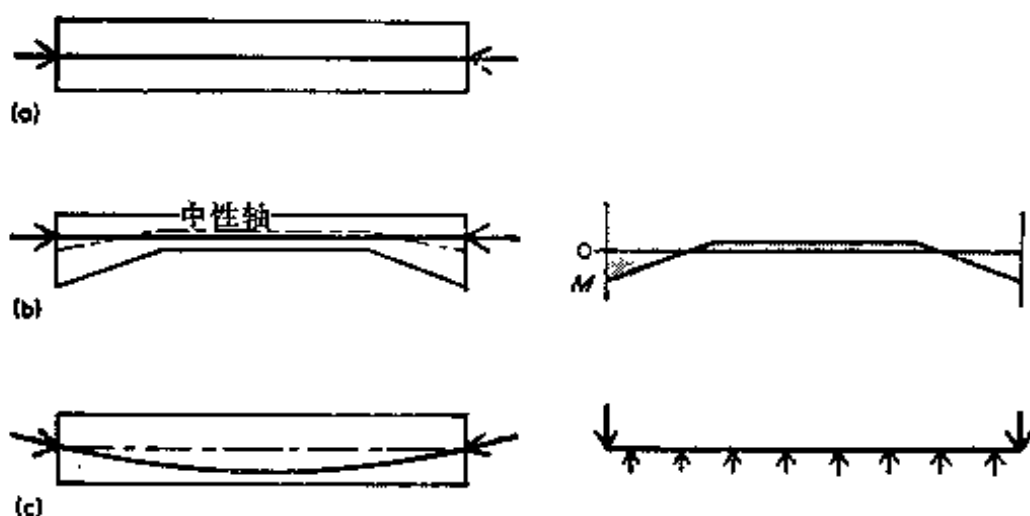


图11.9 由于预应力作用在混凝土上的力

(a)轴向压力；(b)由于压力偏心引起的弯矩；(c)由于索的曲率引起的垂直(或水平)力

(2) 由于从混凝土截面的中和轴算起的压力合力偏心引起的弯矩，如图11.9b所示；

(3) 由于曲线索的反力在混凝土上引起的垂直荷载，如图11.9c所示。

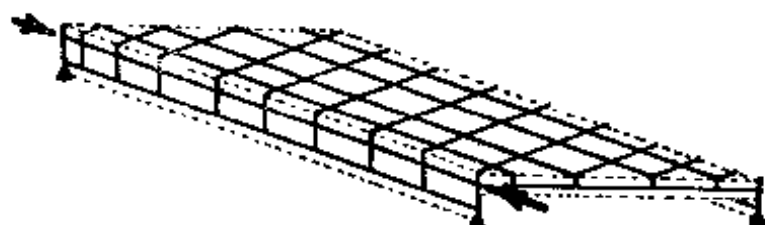


图11.10 交叉式空间构架作预应力的力场分析

这一节及以后各节简单描述在这些荷载方式下混凝土结构是如何工作的，然后说明应用前一章内所述的分析方法时对荷载作出模拟。要彻底了解预应力混凝土的一般性能及其设计可参阅文献〔1和2〕。

在一根长梁上，预应力压力使横截面从这一端到那一端，其均匀应力为压力除以截面面积。应力的分布只是在锚

固区域和翼缘端是复杂的，在翼缘端的局部剪力滞后作用是明显的。如果预应力锚固横贯截面作均匀布置或者预应力密度从一端至另一端作线性变化，则在宽的上部结构中，预应力的压应力的分布也可能是简单的。在后者，上部结构是平面内弯曲的，但若支点是刚性而能抵抗微小的侧向挠度则复杂性就增加了。然而，如果上部结构在平面内有复杂的形状，预应力索在平面内是曲线的，或者一部分所加应力大于（或先于）其余者，则需要作为某些板的形式来分析。这可以用一个空间构架（在第七章所描述的）或有限元法分析（第十三章所述）。图11.10为交叉式空间构架，它可以用于研究斜交梁板式上部结构在靠近钝角隅处的力的分布。

## 11.7 由于索偏心的预应力弯矩

图11.11a表示一等截面的连续式上部结构承受直线索预加应力，该索拉力 $P$ 离中和轴的偏心值为 $e$ 。因为混凝土仅在端部锚固处与索接触并受索的反作用力，所以作用于混凝土的力只有压力 $P$ 及锚固处上拱弯矩 $Pe$ ，由于中性轴是直线的，压力 $P$ 简单地使上部结构全长承受均匀压力，它不影响连续梁的分析。端弯矩使上部结构弯曲，但由于它受内支点所约束，弯矩成为不均匀分布（如图11.11c所示）。这种分布可从具有承受端弯矩如图11.11b所示的连续梁分析求得。

当上部结构具有如图11.12a的变截面时，由于轴力 $P$ 偏心值的变化，使混凝土沿其长度承受的弯矩也发生变化。可以设想这种效应是由于在支点位置处和截面改变处梁受到约束影响而引起的。在每个截面的每一端上施加固端弯矩 $Pe$ ，然后用连续梁法或梁格法来推求放松和移去约束后的内

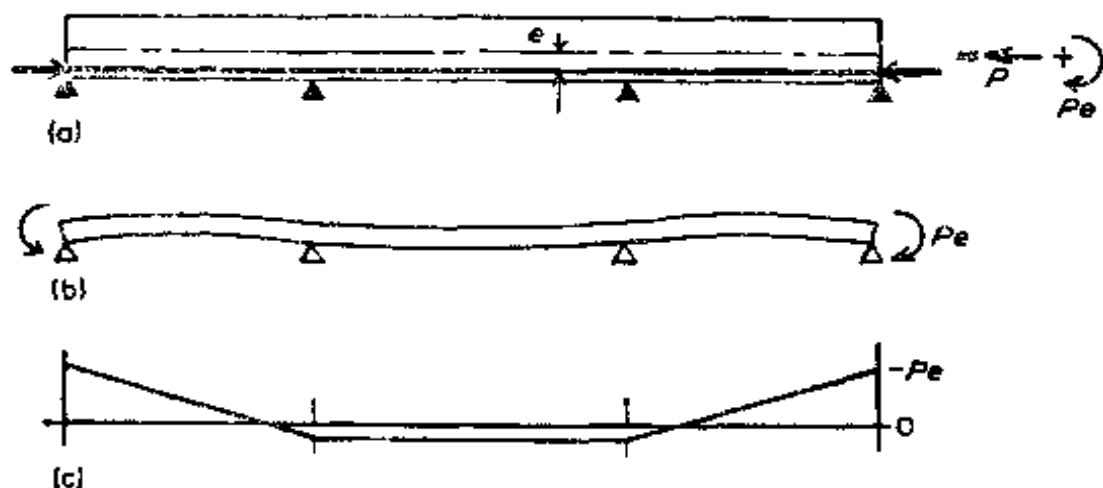


图11.11 由于预应力偏心在三跨上部结构内的预应力弯矩  
(a)正面图；(b)作用于混凝土的弯矩；(c)弯矩图

力重分布。在截面的内部改变处，每一侧的固端弯矩  $Pe$  大部分被抵销了，只剩差值  $\Delta Pe$ 。在变截面梁段内，如图11.12的右面，在任一截面的两侧  $Pe$  是相同的，因而相互抵销。然而，沿变截面梁段混凝土受到弯矩  $\Delta Pe$ ，它一定沿变截面

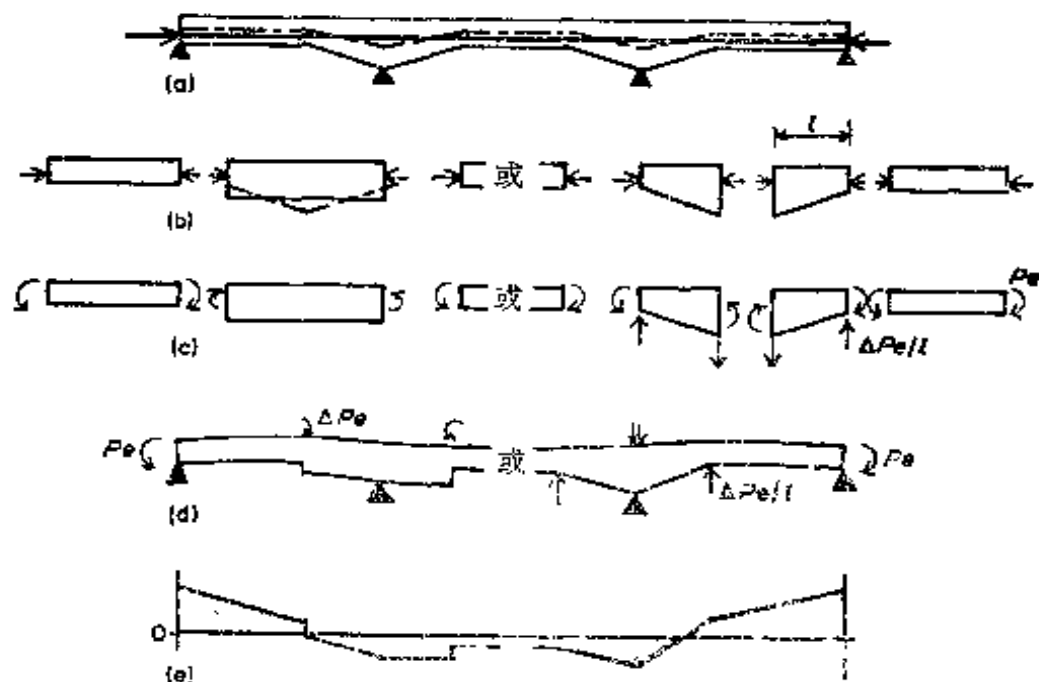


图11.12 变截面上部结构内由于偏心引起的预应力弯矩  
(a)正面图；(b)在约束单元上的压力；(c)约束单元上由于压力偏心引起的弯矩；(d)应用于连续梁分析的弯矩和力；(e)分布弯矩图

梁段均匀地作用，或者，简单地将这均布作用的弯矩由变截面梁段两端的静力等效垂直荷载  $\Delta Pe/l$  来代表（如图11.12c和d所示）。上部结构由于摩阻使  $P$  减少的预应力弯矩  $\Delta Pe$ ，在梁或梁格分析中也可在摩阻力变化的两端处，用相反的垂直荷载  $\Delta Pe/l$  来代表。

## 11.8 由于索的曲率引起的预应力弯矩

一曲线的预应力索在曲线内侧压向混凝土，因而使上部结构受到垂直荷载。通常选择索的纵向位置，以使这些在混凝土上的垂直荷载较大程度地抵销外荷载和自重混凝土内引起的弯曲应力。由于预应力所产生的垂直力，如同活载或恒载一样，压向了混凝土，其效应可用连续梁法或梁格法来研究。

图11.13a为b中由于索的曲率引起作用于一矩段混凝土上的力。若索的倾角从  $\theta_1$  改变到  $\theta_2$ ，则垂直力为：

$$\text{垂直力} = P(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad (11.7)$$

若索的曲线是抛物线型，则荷载以

$$u.d.l. = P(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \frac{1}{l} \quad (11.8)$$

严格地说，由于预应力引起的垂直荷载的集度如同分布荷载随曲率变化那样，应当用于连续梁法或梁格法分析之中。但是在梁格内，若把梁分成短单元，则预应力的垂直荷载可视为在节点处的集中荷载，则式11.7中的  $\theta_1$  和  $\theta_2$  为该点两侧的单元的中点处该索的倾角。

图11.14概括了作用在连续梁或梁格的荷载来模拟锚固点的偏心、变截面和索的曲率效应，从左至右看，荷载为：

(1) 上拱弯矩  $Pe_1$  模拟由于锚固点低于中性轴的偏心值

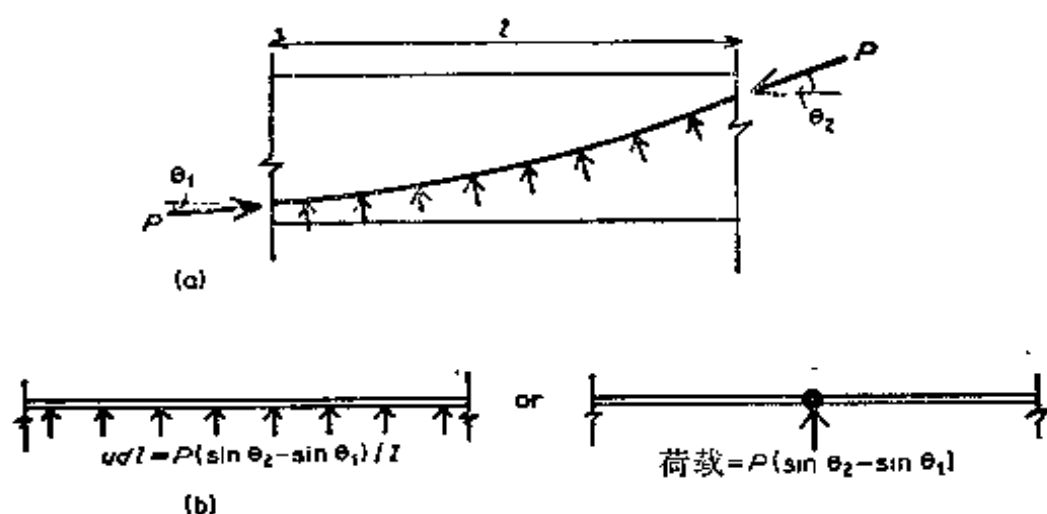


图11.13 由于索的曲率引起的预应力荷载  
(a)混凝土上的力；(b)用于连续梁或梁格分析的荷载

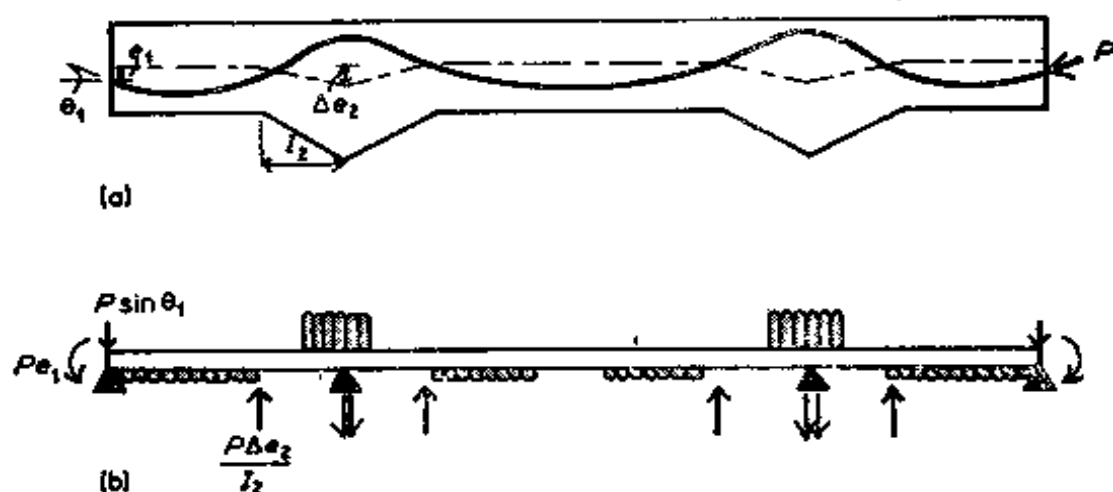


图11.14 用连续梁分析预应力荷载示例  
(a)索的纵面；(b)荷载

$e_1$  在混凝土上引起的弯矩。

(2) 垂直力  $P \sin \theta_1$  模拟由于索的倾角  $\theta_1$  在锚固点引起的垂直分力。

(3) 当索弯曲朝上时，则作用在上部结构的分布荷载的作用方向上。

(4) 在加腋的每一端处，用垂直力  $P \Delta e_2 / l_2$  来模拟上

● 原文误为  $l$ ——译者注。

部结构由于沿加腋处中性轴的水平面改变值  $\Delta e_2$  引起的弯曲荷载。

(5) 当索弯曲向下时，上部结构在支点的分布荷载的作用方向向下。

必须注意，上部结构由于预应力引起的所有垂直荷载的总和必须为零。

## 11.9 用柔度系数作预应力分析

在第11.7和11.8节内预应力弯矩的分析是针对梁格分析的，在该分析中，结构在节点处受到刚性约束，单元承受由于预应力引起的垂直荷载和固端弯矩，以及放松后的重分布弯矩。另一种方法是首先把结构考虑为简支梁跨承受由于预应力引起的弯矩，然后求出使分割成段的结构连接在一起时所要求的反作用弯矩，这就是在第2、3、5节所述的柔度系数法。

图11.15示出一上部结构的一小段。预应力索的拉力  $P_1$  和  $P_2$  以及偏心  $e_1$  和  $e_2$  贯穿该小段的两个端面。当上部结构为简支时，混凝土内任一截面处的压力  $P$  是与索的拉力相等而方向相反。混凝土内在该点的无约束弯矩为

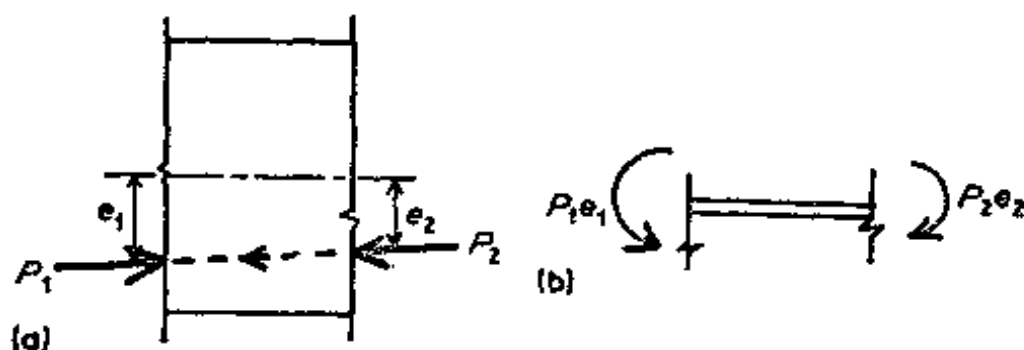


图11.15 上部结构自由单元上的预加应力的力  
(a)力；(b)等效弯矩

$$M = Pe \quad (11.9)$$

式中  $P$  为截面处的预应力的力，而  $e$  为从中性轴算起的预应力索的偏心值。若索是曲线的，则中性轴作偏上和偏下移动，如图11.16a所示，则  $e$  仍为这两线的间距。图11.16b为沿跨径的无约束弯矩图。除了从锚固处由于摩阻力降低  $P$  值使弯矩减小外，它在形状上与索偏离中性轴的曲线相象。

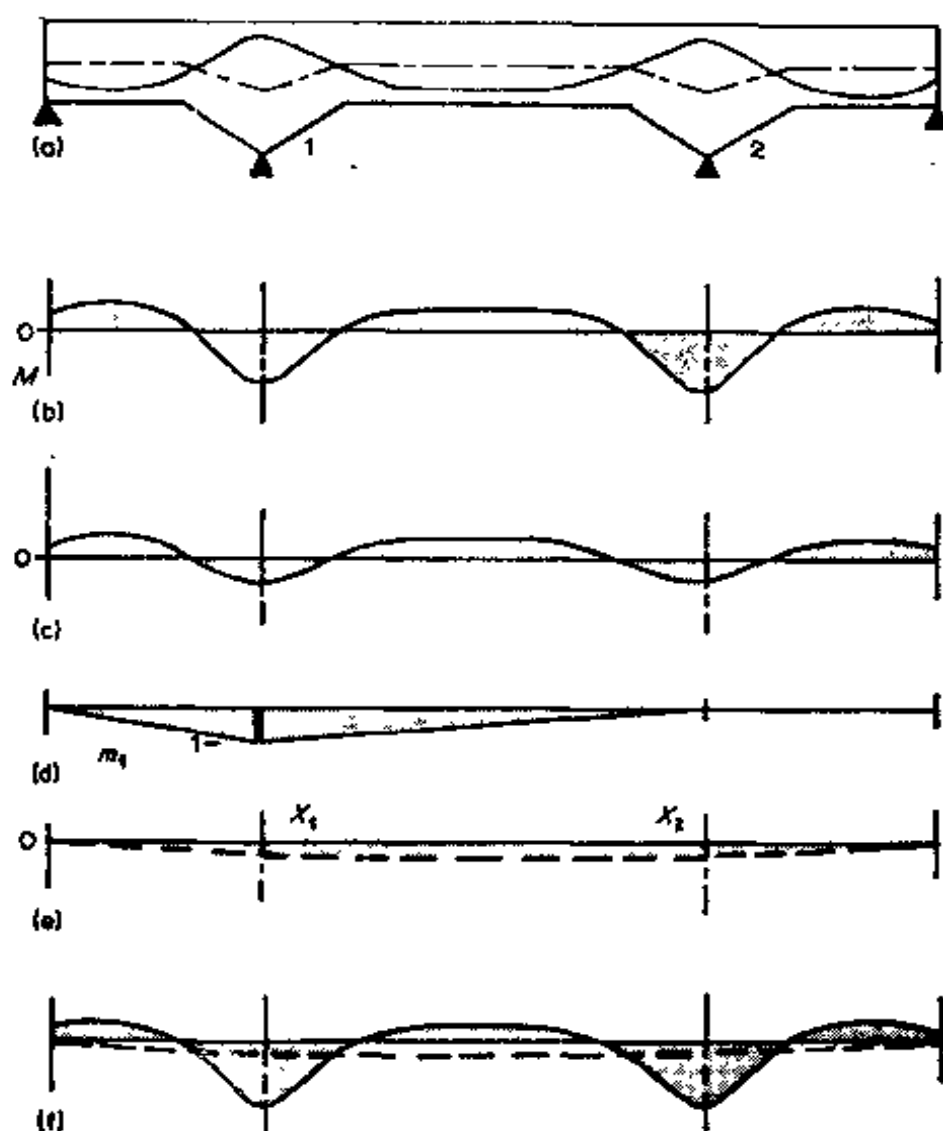


图11.16 连续梁的预应力弯矩的柔度分析

(a) 索的纵断面；(b) 无约束弯矩  $M = Pe$  图形；(c) 无约束  $M/EI$  图；  
(d) 支点1处的单位放松弯矩；(e) 反力作用或附加（或二次的）弯矩；  
(f) 总计预应力  $= b + e$

在这些无约束的弯矩的作用下，各跨将产生挠度，而且由于它们是考虑作为各不相连的跨度，在内支点每一侧的跨间相邻端处发生相对转角。在支点 1 处相对转角为

$$\delta_{1w} = \int \frac{m_1 m_w ds}{EI} \quad (2.12)$$

式中  $m_w$  为由于作用的预应力引起无约束弯矩  $Pe$ ，而  $m_1$  为支点 1 处由于单位反作用弯矩引起的弯矩，如图 11.16d 所示。为了计算乘积积分（式 2.12），需要绘出  $\frac{Pe}{EI}$  图，即用图 11.16b 的弯矩图除以  $EI$ ，如图 11.16 所示。乘积积分就可以用图 11.16d 中的  $m_1$  乘图 11.16c 计算出来，因而得出  $\delta_{1w}$ 。同理可将支点 2 处的相对转角求出。按照第 2、3、5 节中所示步骤，将  $\delta_{12}$  求出（和  $\delta_{21}$ ），但要考虑到  $EI$  的变化。然后得出式 2.11 的形式方程组以求出支点处的反作用弯矩  $X_1$  和  $X_2$ ，如图 11.16e 所示。这些弯矩加上图 11.16b 的无约束弯矩就得出连续的混凝土结构内的总弯矩，如图 11.16f 所示。

必须注意，对于简支跨，预应力在索和混凝土之间相互影响是简单的，并没有外反力。当跨度为连续时，反作用弯矩  $X_1$ 、 $X_2$  等引起在支点处反力。通常无约束的弯矩作为“主要的预应力”，而反作用弯矩作为“二次的”或“附加的”弯矩来讨论的。这些区分对于连续梁是方便的，但是对于宽阔的斜交式，变宽度式或曲线式的二维上部结构意义是不大的，因为由于上部结构本身引起的弯矩横向重分布同由于在支点处的连续性引起的纵向重分布一样明显。

### 参考文献

1. Libby, J.R. (1971), *Modern Prestressed Concrete, Design Principles and Construction Methods*, Van



Nostrand Reinhold, New York.

2. Harris, J.D. and Smith, I.C. (1963), Basic Design and Construction in Prestressed Concrete, Chatto and Windus, London.

## 第十二章 谐波分析和褶皱理论

### 12.1 引言

在其他章节中，分述了的梁格法和有限元法，当用这些分析方法分析复杂桥梁上部结构时，一般是把复杂结构视为简单结构单元的组合体。对每一单元假定出简化的力—挠度的性能，对结构引入大量的非连续性并从而求出解答。另一种无需将结构分割的分析办法是谐波分析、“正交异性”或“褶”板理论。严格地说，当数学模型能够严格满足弹性连续体的应力—应变假定的意义时，精确的解答是能够求得的。然而，在下而所述的方法中，只能适用于从桥台到桥台，横截面均为相同的等截面上部结构。图12.1表示出常用的上部结构的横截面的形式。图12.1a和b可用正交异性板理论分析，而图12.1c、d、e则可用褶皱理论分析。

在谐波分析中，把荷载分成许多分量，每一分量由平行结构的分布线荷载组成，而且具有集度变化的一个单纯的正弦波（如图12.2所示）。在每一正弦波分量的作用下，则结构的每一块纵向板或腹板亦以单纯的正弦波作挠曲与扭转，因为正弦波的各阶导数是正弦或余弦函数，所以，平衡方程式可设想为挠度的各阶导数，故能表达为许多正弦或余弦函数而不带微分符号。这些方程式可作为普通的联立方程式来求解。

这一章说明荷载或其他函数如何能够表示为许多谐波分

量，然后示出上部结构的荷载分布特性对于低谐波和高谐波如何有明显地不同，因此，在不同类型的荷载作用下，可以从谐波组合得到解答，而无须对结构作详细分析。最后，摘要叙述褶板理论的基本原理。

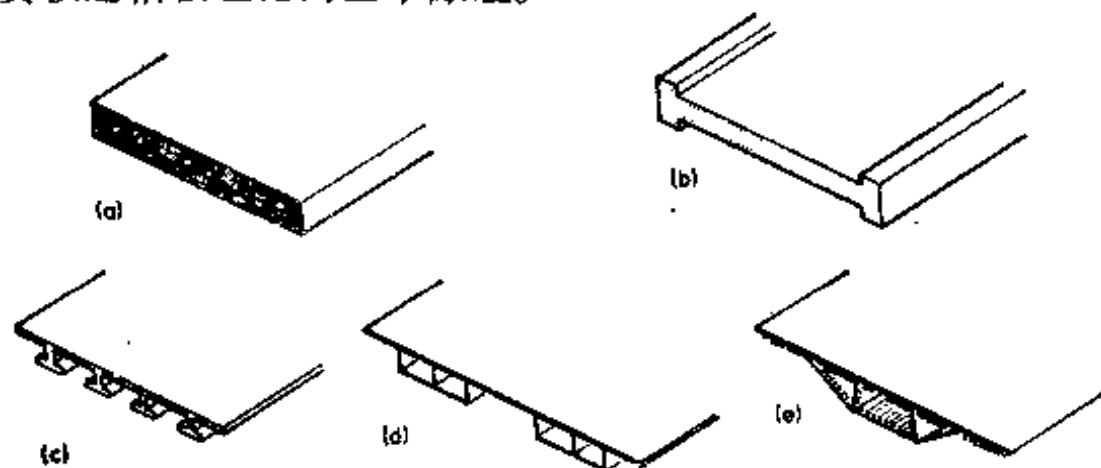


图12.1 等截面上部结构的横截面

## 12.2 荷载、弯矩的谐波分量

关于谐波或富利叶 (Fourier) 的一般理论分析，在许多数学教科书和手册中已详细描述，包括克里斯基 (Kreyszig) [1]。这一节叙述只适用于上部结构分析理论的特殊应用。图12.3a 表示跨径为  $L$  的简支梁在左支点处为座标原点，梁承受荷载。对于荷载可以定为一个广义谐波分量的无穷级数式，然后，令支点的边界条件的弯矩和挠度为零计算谐波值。然而，用物理推论去满足边界条件是较简单的，梁和荷载可考虑为具有反复荷载作用的无限长梁的一部分，如图12.3b 所示。它会自动形成间隔为  $L$  弯矩及挠度为零的反弯点。反复荷载  $W$  是  $x$  的函数，可用无穷正弦级数表示：

$$W(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \dots \quad (12.1)$$

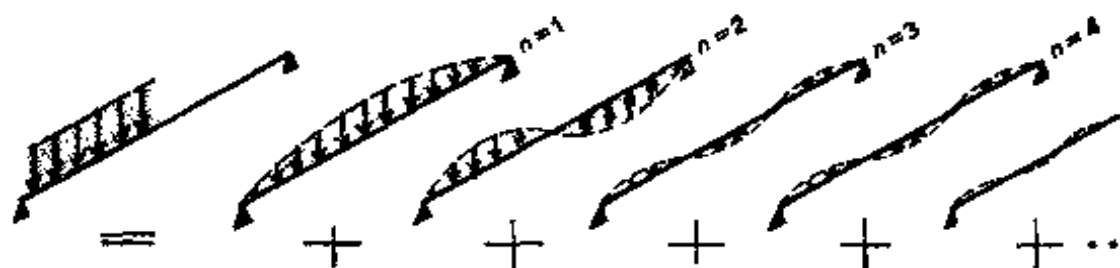


图12.2 荷载分为正弦的谐波分量

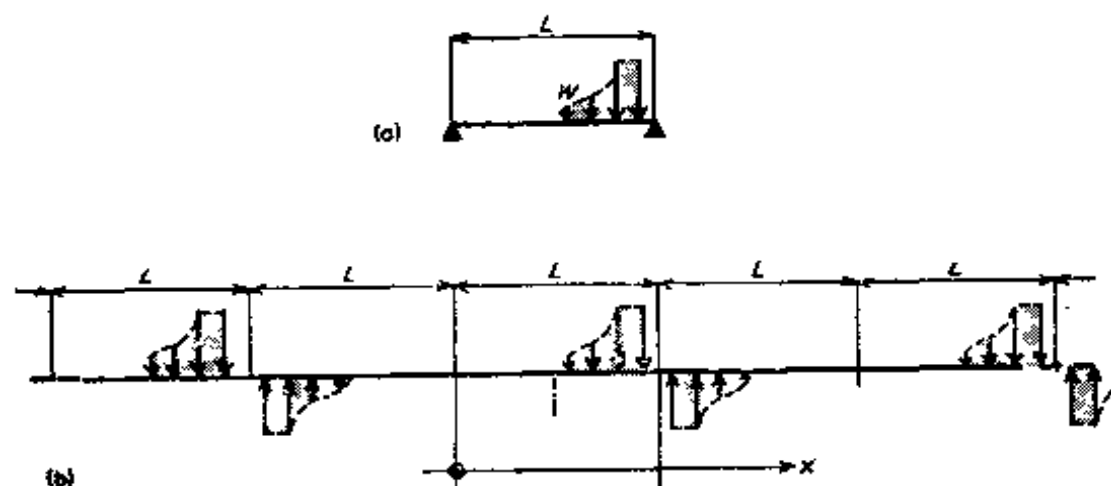


图12.3 (a)当作无限长梁一部分的简支梁；(b)无限长梁

这里没有余弦项，因为二次微分和四次微分为弯矩和挠度，余弦函数在  $x=0$  与  $L$  处不能满足弯矩和挠度为零的边界条件。

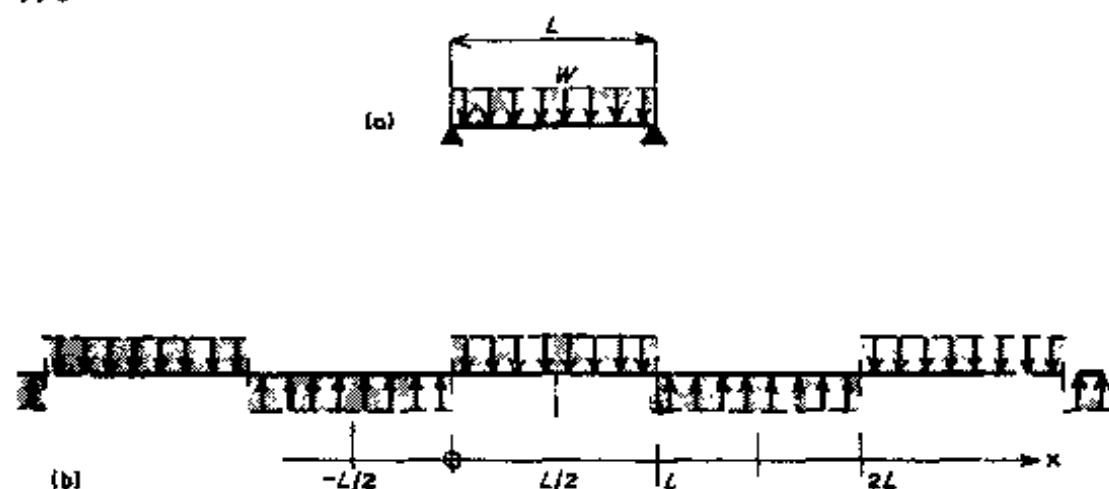


图12.4 在简支梁的均布荷载

系数  $b$  则为

$$b_n = 2 \times \left[ \text{在 } x=0 \text{ 和 } x=L \text{ 间 } W(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \right. \\ \left. \text{的平均值} \right] \quad (12.2)$$

例如，在图12.4a 中的均布荷载则为，

$$b_n = 2 \times \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{W}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} = 2 \times \frac{1}{L} \times \frac{W}{L} \\ \times \frac{2L}{n\pi} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{取 } n=1, 3, 5 \dots \text{时} \\ \text{取 } n=2, 4, 6 \dots \text{时} \end{array} \quad (12.3)$$

因为均布荷载对上部结构的中心线是对称的，而偶数的谐波函数是完全反对称，故全部偶数的谐波系数为零。它还可用来表达任何荷载情况，如图12.5的集中荷载，可用如图12.5b 所示的对称分量与图12.5c 所示的反对称分量两者的组合来表示。对称分量的谐波由奇数谐波函数所构成，而反对称分量则由偶数谐波函数来表达。

因而对于荷载、弯矩或挠度：

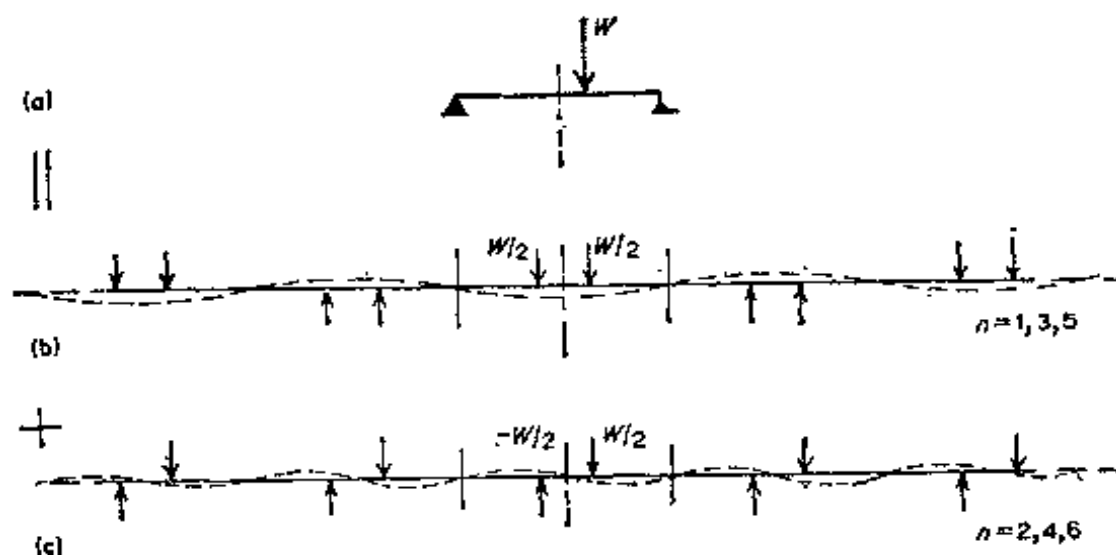


图12.5 荷载的对称与反对称分量  
(a)全部荷载；(b)对称的；(c)反对称的

对称分量的谐波  $n = 1, 3, 5 \dots$

(12.4)

反对称分量的谐波  $n = 2, 4, 6 \dots$

对于图12.5a 的荷载情况，剪力图以及相应于图12.5b 和 c 中对称和反对称分量，均表示于图12.6a, b 和 c 中；这些也应设想为无限长的反复的图式一部分，必须注意到对称荷载产生一个反对称剪力图，反之亦然。

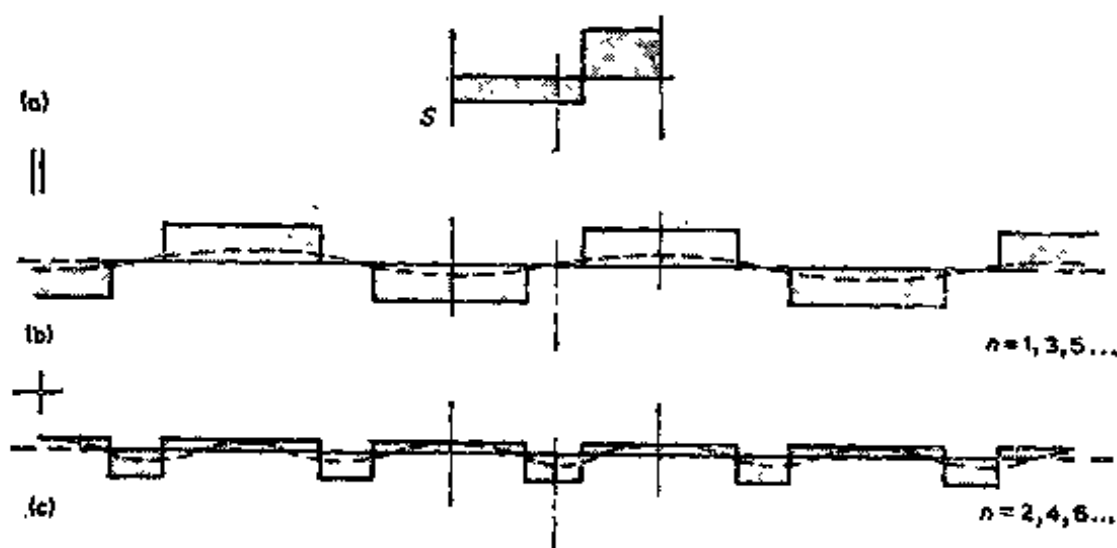


图12.6 图12.5所示荷载的剪力图

(a)全部；(b)反对称；(c)对称

对于剪力图的一般表达式，可写成为：

$$S(x) = a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + \dots + a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \dots \quad (12.5)$$

式中：

$$a_n = 2 \left[ \text{在 } x=0 \text{ 和 } x=L \text{ 间 } S(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \text{ 的平均值} \right] \quad (12.6)$$

对于剪力和斜率则为

$$\text{对称谐波分量} \quad n = 2, 4, 6 \dots\dots \quad (12.7)$$

$$\text{反对称谐波分量} \quad n = 1, 3, 5 \dots\dots$$

实际上，剪力是荷载强度的积分乘以  $-1$ ，即对荷载函数求积分，是很容易记忆的。因此，

$$W = \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3 \dots\dots$$

$$S = \sum b_n \left( \frac{L}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (12.8a)$$

对于弯矩、斜率和挠度。由重复积分可求得：

$$M = \sum b_n \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$EI = - \frac{dW}{dx} = \sum b_n \left( \frac{L}{n\pi} \right)^3 \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$EIW = \sum b_n \left( \frac{L}{n\pi} \right)^4 \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12.8b)$$

任何谐波函数的荷载、弯矩和挠度的系数之间的比例关系是很值得记忆的，即

$$1 : \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 : \left( \frac{L}{n\pi} \right)^4 \times \frac{1}{EI}$$

对于典型设计荷载谐波分量的幅值表列于图 A2 和 A3 中。图 A3 的第 1 列表示由简单梁的理论推导的总荷载函数及其剪力等积分。第 2 列给出第一谐波的幅值。第 3 列为第 1 和第 2 两列的差值给出所有较高谐波的总和。第 4 列给出任何其他谐波  $n$  的幅值。

## 12.3 低谐波和高谐波的特性

### 12.3.1 低谐波分布

理解荷载谐波的组合可以深入观察到梁板式或分格式桥梁上部结构的物理性能，这是特别有用的。纵向刚度比横向刚度大，此是这种上部结构的基本形式，它着重于低谐波和高谐波的荷载的不同反应，例如，考虑如图12.7所示的桥梁上部结构。第1列为作用于腹板上的荷载及其所分布的弯矩和挠度形式。第2列和第3列表示在第1列中每个函数的第1和第3谐波。

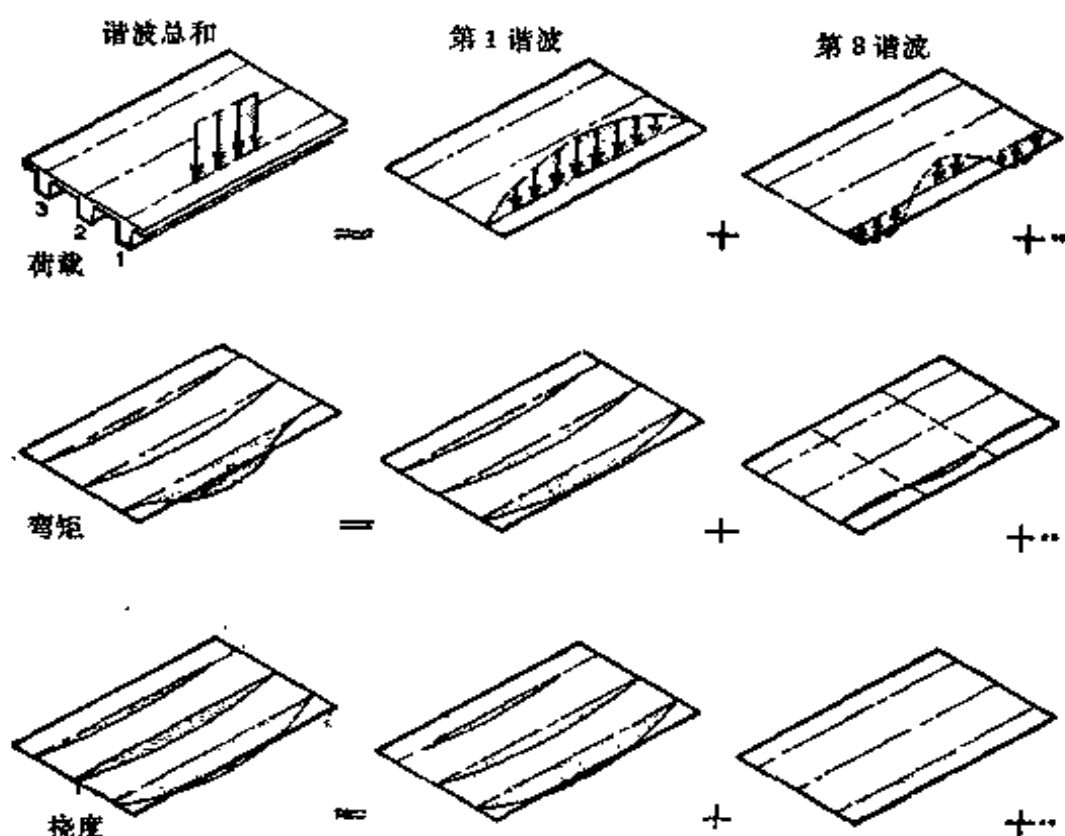


图12.7 桥梁上部结构的荷载、弯矩及挠度的分布

当梁1在荷载作用下挠曲时，则部分荷载由参与桥面板



平面以外的弯矩和扭转的垂直剪力传递到梁 2 和 3，而另一部分则由桥面板的平面内的剪力传递。虽然面板与梁的高度相比是较薄的，而梁间的跨径短，就使板（梁间跨径）具有一个与梁（桥台间为跨径）相差不大的刚度。因而当梁 1 挠曲时，弯矩的第一谐波的较大部分通过面板传递梁 2，如图 12.7 的第二列所示。可以看出梁 1 负担第 1 谐波的 60%，而梁 2 和 3 分别只负担 25% 和 15%，正确的数值与结构的形式和尺度有关。还要注意到，对于由相同的梁构成的上部结构，第一谐波的分布对于挠度和弯矩是一致的，因为对于任何的谐波分量，弯矩是与挠度成比例的。

### 12.3.2 高谐波的集中

图 12.7 所示桥梁上部结构在荷载的第三谐波作用下，实际为简支于第 3 谐波的正弦波的反弯点之间。它的跨径为有效地为第 1 谐波跨径的三分之一，因此它的纵向弯曲刚度为第 1 谐波的 27 倍。另一方面，桥面板的横向弯曲同前一样，以梁的间距作为板的跨径。因此该受载的梁在荷载的第 3 谐波作用下挠曲时，在纵向上几乎全部荷载由非常刚性的梁来承受，而发生横向分布非却常有限。在图 12.7 所示上部结构上，按第 2 列的形状对第 1 谐波的分布，受载梁将近似的保留第 3 谐波的 90%，仅 10% 分布到邻近的梁上，如第 3 列所示。

作为工作上的假设，常假定荷载的第 1 谐波横向分布（如图 12.7 第 2 列所示）较为方便，而较高的谐波仍然集中在受载的梁上。严格地说，这只适用于第十章所规定视为“梁”的简支桥梁上部结构，其中心距离大于  $1/10$  跨径。对连续梁，往往把反弯点之间的上部结构视为简支来分析跨中截面。在连续的或梁的间距较密的梁的桥梁上部结构的一般分析中，需要分析较高的谐波，直至其分布可以略去为止。

另一观察较高谐波无分布的结构特性的途径是把它考虑为圣维南 (Saint-Venant) 原理的一个例子。图12.8为承受高谐波荷载的桥面板的一部分。在谐波的区域内向下的半波处桥面板必然下弯，而在向上的半波处则向上拱。然而在远离半波长的点上，向下和向上的荷载效应实际上抵销了，换

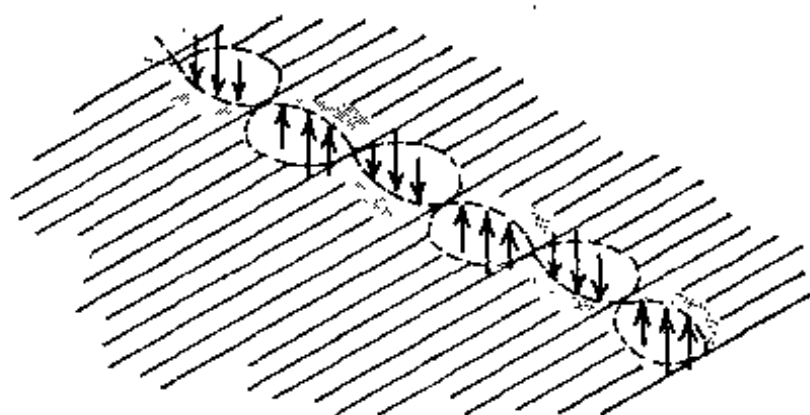


图12.8 高谐波荷载的局部效应

言之，荷载发生局部变化时，其影响宽度只相当于发生荷载变化的长度，而在整个较大的面积上大部分的向上或向下的力都彼此抵销了。因此，假如特种车辆置于桥梁上部结构时，准确选择集中荷载分布函数对梁内弯曲的值影响甚小，这是因为梁的尺度远较轮距比较大的缘故。但是，却影响桥面板的局部弯矩，因为桥面板的跨径与轮距大小相同。由于这个原因，在轮重作用下，从总的观点分析弯矩，从局部分析桥面板弯矩，然后叠加是有效的。后者可以由威斯特卡德 (Westergaard) [2, 4] 的方程式及泼吉尔 (Pucher) [3] 的影响图求得。然而，重要的是在整体上部结构的弯矩分析中，荷载作用要正确；而在局部弯矩分析中，则边界条件的假定要正确。

如果桥梁上部结构在纵向用间距较大的少数梁或腹板作加劲时，则荷载将不按简单的静力关系分布至各梁。板的横

向受弯性能可视为具有旋转刚度的弹性支承连续梁。在荷载分布分析中,实际荷载可由固端弯矩和剪力来代替,而不再使用支点静力分布荷载。

严格地说,固定边的弯矩和剪力要应用泼吉尔(Pucher)〔3〕假定固定边界条件的局部荷载分析来求得。

反之,通常荷载可以局部沿梁长作静力重分布,因为在该方向上刚度无突然变化。同样,在厚的桥面板上,荷载的局部静力重分布对分布荷载性能上影响甚微。

### 12.3.3 低谐波和高谐波不同效应举例

图12.9为接近桥台处剪力分布可由分布的第一谐波和不分布的高谐波二者叠加求得。图12.9a为接近桥台处车辆的两个轮重,图12.9b为整个桥梁的剪力图。总剪力,即阴影所示为谐波的总和可用简单梁理论求得。第一谐波分量(虚线所示)用第12.2节的方程式求得。如前所述,第一谐波分布明显,如图12.9c所示。关于上部结构构造的精确分布可从第十章的图表求得。高谐波的总和为图12.9b中总剪力与虚

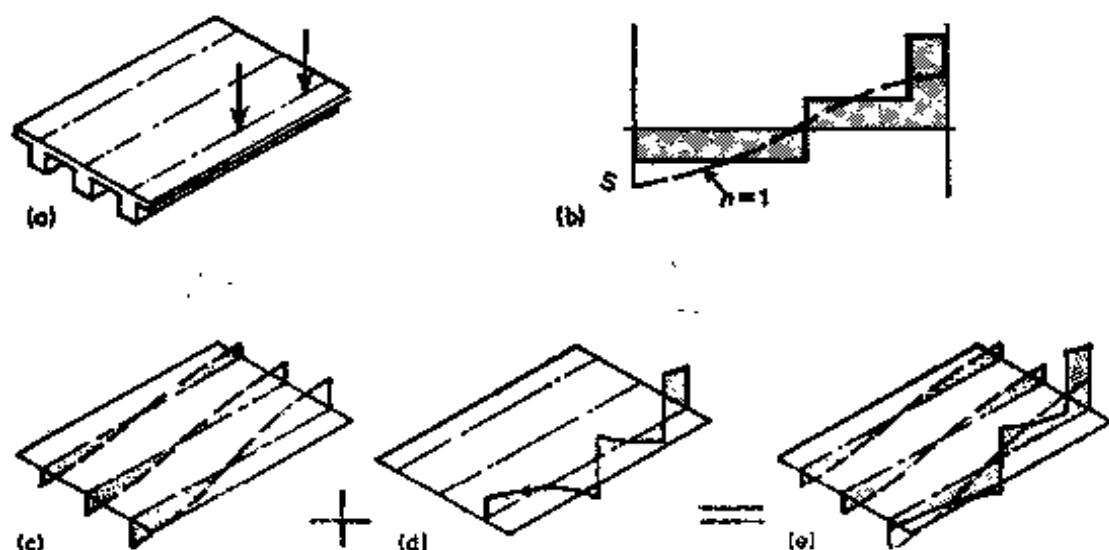


图12.9 分布的第一谐波与不分布的高谐波的叠加中的剪力  
(a)荷载; (b)总剪力图; (c)分布的第一谐波; (d)非分布的高谐波;  
(e)最后的剪力分布

线所示的第一谐波之间的差值。这些高谐波假定不作分布，仍单独作用到受载的梁，如图12.9d所示。则如图12.9e所示的最后的剪力分布系由分布的第一谐波图12.9c及非分布的高谐波图12.9重新组合而求得的。

显然，在图12.9e中，从图12.9c所示的第一谐波求得的及图表求得的最终剪力分布有明显不同。这是因为当荷载靠近桥台时，高谐波是形成总剪力的主要部分。附录A的图A.3列出了几种设计荷载的第一谐波和高谐波分量。可以看出，通常，弯矩、斜率或挠度的第一谐波分量与总函数值非常接近，只在靠近荷载处剪力偏差较为显著。

## 12.4 平面上部结构的谐波分析

在参考文献[1, 4-7]中的刊物中，比较详细地概括了对各种类型的上部结构用谐波分析的理论与应用。特别是对于平面上部结构，罗 (Rowe) [4]概括了正交异性板理论，而亨特来 (Hendry) 和乔奇 (Jaeger) [5]则论述了梁板式上部结构和格梁构架的分析。这里为了说明如何应用谐波分析，现以图12.10所示的经过人为简化的上部结构分析如下。

图12.10a所示梁板条式上部结构为三根箱形梁支承横铺板条的桥面所构成。为了简化问题，假设箱梁具有很大的抗扭刚度而无扭转，因此，结构的挠度仅有梁的垂直挠度 $w_1$ ， $w_2$ 和 $w_3$ 如图12.10b所示。设板长为第 $n$ 谐波反弯点之间的距离。取左端为原点，梁1和2在任意点上的挠度为

$$w_1 \sin \alpha x \text{ 和 } w_2 \sin \alpha x$$

式中：

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \quad (12.9)$$

横铺板条在上部构造每单位宽度上的垂直剪力由方程式 2.8 给出, 即

$$\begin{aligned} s_{12} &= -\frac{6Ei}{l^2} \left[ \frac{2}{l} (w_1 \sin \alpha x - w_2 \sin \alpha x) \right] \\ &= -\frac{12Ei}{l^3} (w_1 - w_2) \sin \alpha x \end{aligned} \quad (12.10)$$

式中:  $i$  = 板条每单位宽度上的惯性矩。

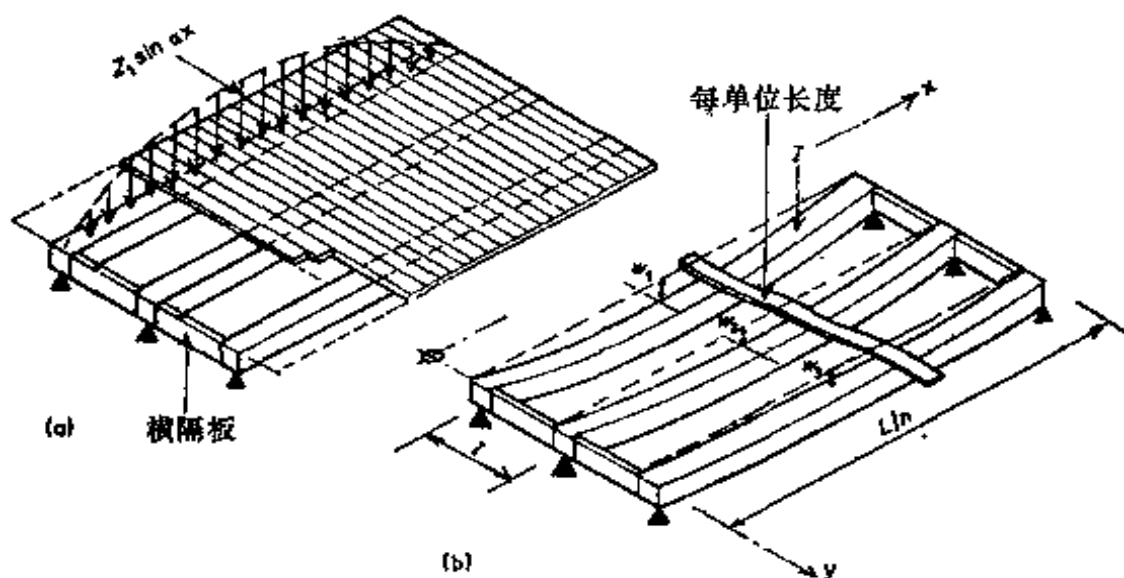


图12.10 (a)荷载; (b)梁板式上部结构的挠度

若  $Z_1 \sin \alpha x$  为梁 1 的作用荷载的第  $n$  谐波, 则在梁 1 的任意点上, 净的垂直荷载为:

$$Z_1 \sin \alpha x - s_{12} = \left[ Z_1 - \frac{12Ei}{l^3} (w_1 - w_2) \right] \sin \alpha x \quad (12.11)$$

方程式 12.8 表示惯性矩为  $I$  的梁承受荷载  $b_n \sin \alpha x$  时, 则其挠度为  $(b_n / EI \alpha^4) \sin \alpha x$ 。因此, 若梁 1 的荷载由方程式 12.11 给出, 而挠度为  $w_1 \sin \alpha x$ , 则

$$w_1 \sin \alpha x = \frac{1}{EI \alpha^4} \left[ Z_1 - \frac{12Ei}{l^3} (w_1 - w_2) \right] \sin \alpha x$$

可以写成

$$\left( EI \alpha^4 + \frac{12Ei}{l^3} \right) w_1 - \frac{12Ei}{l^3} w_2 + 0w_3 = Z_1 \quad (12.12)$$

对梁2和梁3的弯矩平衡及板的荷载分布，也可得到相似的方程式，其作用荷载为

$$\begin{aligned} -\frac{12Ei}{l^3} w_1 + \left( -\frac{12Ei}{l^3} + EI \alpha^4 + \frac{12Ei}{l^3} \right) w_2 \\ - \frac{12Ei}{l^3} w_3 = Z_2 \end{aligned} \quad (12.13)$$

$$0w_1 - \frac{12Ei}{l^3} w_2 + \left( \frac{12Ei}{l^3} + EI \alpha^4 \right) w_3 = Z_3 \quad (12.14)$$

由方程式12.12—12.14可以求出相应于特定荷载  $Z_1$ ,  $Z_2$  和  $Z_3$  的  $w_1$ ,  $w_2$  和  $w_3$  的值。然后把这些挠度代入方程式12.10和12.8中就可得到板条和各梁内的力。

上述步骤是遵循每个分布较显著的荷载谐波进行的。将各梁的力的谐波加在一起，就得出整个上部结构的荷载总分布。

## 12.5 褶板分析

在12.4节的例题中，方程式12.12—12.14涉及到每一根梁的节点与梁本身之间力的平衡关系，板条跨过梁的两侧或其一侧并作用有荷载。这问题较简单，因为每一节点仅有一

个自由度，即为垂直挠度。相比之下，则图12.1c, d 和 e 所示的褶皱板结构，每一纵向节缝就有四个自由度：垂直挠度，纵轴转角，侧向挠度和节缝的翘曲位移。至于各点的其他位移，如绕横轴转角等，可设想为上述四项的微分。虽十分复杂，但分析方法基本上是相同的。精确的“弹性”褶皱结构的分析方法是由戈尔德贝格(Goldberg)和勒佛(Leve)〔6〕导出的，并由狄弗里斯—史肯(DeFries-Skene)和史考特里斯(Scordelis)〔7〕写成矩阵形式而适用于计算机分析，要是没有矩阵代数的简写形式和大型计算机的数字容量，精确的解答是无法实现的。例如，如果每一节缝具有四个自由度，则图12.1d 中的上部结构所需要的联立方程式数目最少为 $14 \times 4 = 56$ 。在实用上，在面板与腹板交会处，通常设置附加的纵向节缝，以增加板条数目，此办法比较合适。对于这个例题，联立方程式的数目大概接近120个。

除了较多的力系外，板内的力与位移之间的关系式比式12.10或12.8更为复杂。图12.11和12.12说明了板条边缘的作用力及位移分开为产生板条平面外弯曲和扭转以及产生平面内变形的情况。褶皱理论的基本假定之一是平面内与平面外的性能是独立的。第二个基本假定是板端在平面外位移和转角（图12.11中的 $w$ 和 $\phi$ ）及平面内横向位移（图12.12中的 $v$ ）都是受约束的，但对翘曲（图12.12中的 $u$ ）则为自由的。这些支承约束保证上部结构的简支状态，谐波分析也可具有第12.12节所述的简化系数。这种对挠度的约束相当于假定在上部结构的端部有一垂直的横隔板来阻止平面内的位移。

板条边缘的力的谐波幅值与两边缘位移之间的刚度关系见图12.11和12.12，写成矩阵型式为：

$$\begin{pmatrix} r_{12} \\ p_{12} \\ s_{12} \\ m_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & k_{11} & 0 & 0 \\ k_{11} & n_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & b_{11} \\ 0 & 0 & b_{11} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{12} & k_{12} & 0 & 0 \\ -k_{12} & n_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & b_{12} \\ 0 & 0 & -b_{12} & c_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

或  $r_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 \quad (12.15)$

系数表达式可在参考文献〔6和7〕查到，在精确的“弹性”方法中，每一个系数是复杂的。例如

$$g_{11} = \frac{Ed}{(1+\nu)^2} \frac{n\pi}{L} \times \left[ -\frac{\sinh\left(\frac{n\pi l}{2L}\right)}{\frac{n\pi l}{2L} \csc h\left(\frac{n\pi l}{2L}\right) - \frac{3-\nu}{1+\nu} \cosh\left(\frac{n\pi l}{2L}\right)} + \frac{\cosh\left(\frac{n\pi l}{2L}\right)}{\frac{n\pi l}{2L} \sec h\left(\frac{n\pi l}{2L}\right) + \frac{3-\nu}{1+\nu} \sinh\left(\frac{n\pi l}{2L}\right)} \right] \quad (12.16)$$

式中： $d$  为板的厚度。

（重大的简化是引自所谓“普通”方法的理论，这方法是计算机程序的基础。在这方法中对于平面外弯曲，板作为横向跨度板条来处理，而对平面内变形则同简支梁一样。这对于屋顶结构来说，此引起的误差是微小的，但对于桥梁结构略去面板平面内的剪力变形就可能導致较大的误差）。



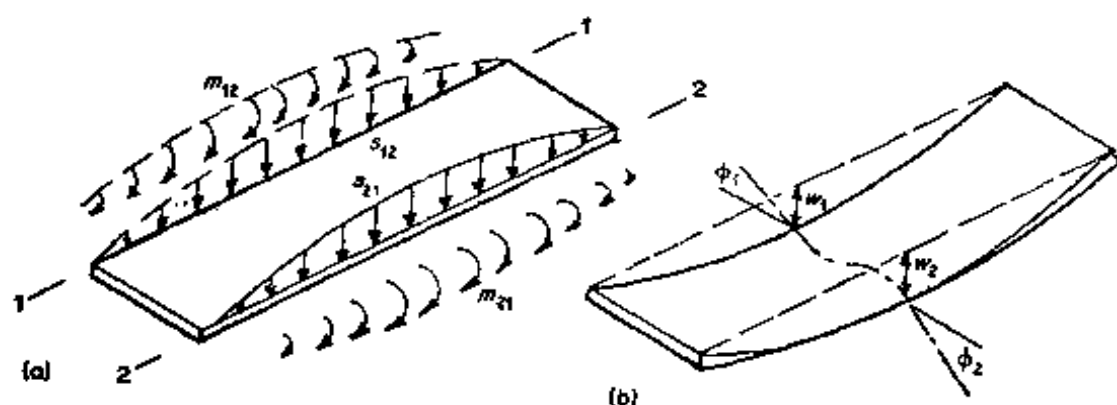


图12.11 (a)板的平面外荷载；(b)板的挠度

在写出作用于节缝上的力的平衡方程式之前，需要把板条的边缘力和位移从图 12.13a 中板的局部座标变换为如图 12.13b 的结构总体座标，在图 12.13b 中字母上加横杆的表示总体的变量。将图 12.3a 的局部座标力变换为总体座标方向，则为

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{\rho} \\ \bar{s} \\ \bar{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \rho \\ s \\ m \end{bmatrix}$$

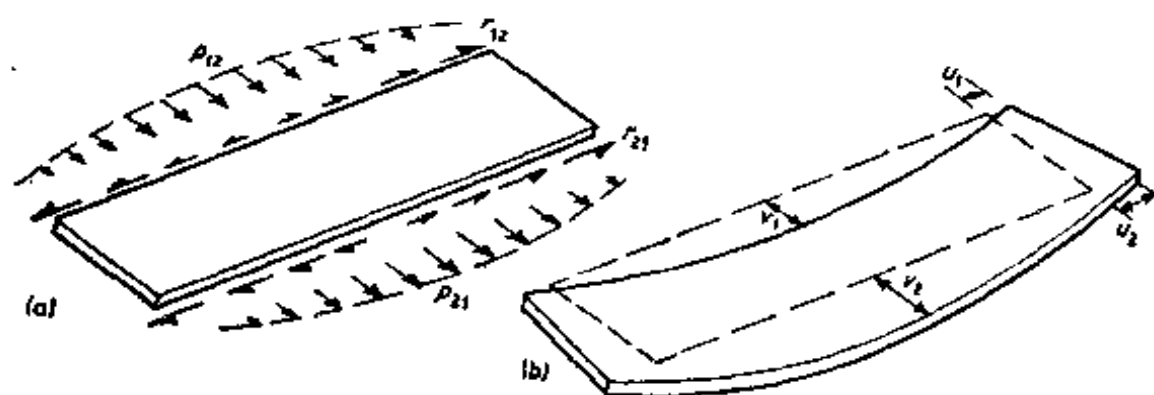


图12.12 (a)板的平面内的荷载；(b)板的挠度

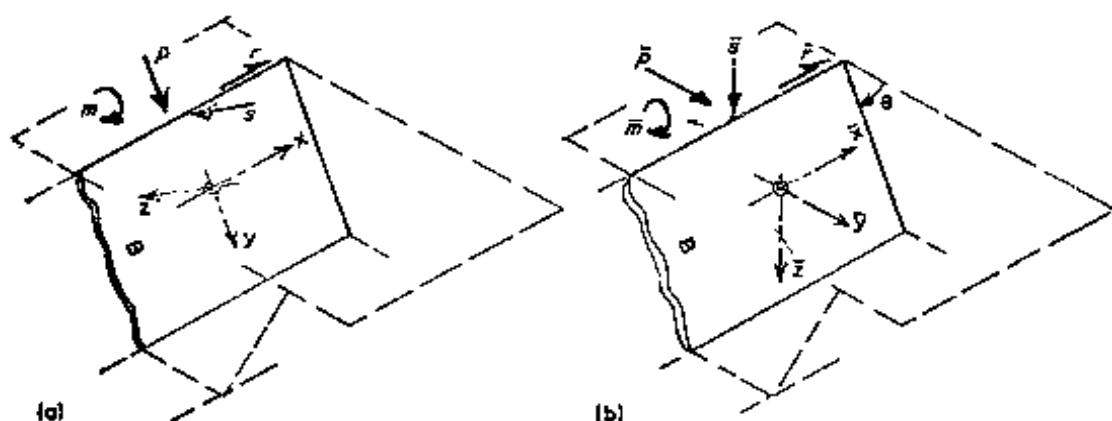


图12.13 (a)板边缘力的局部坐标；(b)板边缘力的总体坐标

或

$$\bar{r} = tr \quad (12.17)$$

局部坐标位移  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $\phi$  与总体坐标位移  $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{w}$ 、 $\bar{\phi}$  的变换关系为：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{\phi} \end{bmatrix}$$

或

$$u = t^t \bar{u} \textcircled{1} \quad (12.18)$$

式中： $t^t$  为  $t$  的转置矩阵。

由式12.15 $\textcircled{2}$ —12.18，可以得出板的总体坐标的边缘力和位移之间的刚度关系。

$$\bar{r}_1 = t k_{11} t^t \bar{u}_1 + t k_{12} t^t \bar{u}_2 = \bar{k}_{11} \bar{u}_1 + \bar{k}_{12} \bar{u}_2 \quad (12.19)$$

变换式  $tk t^t$  的计算是使用近代计算机的一个相当简单的程序。

一旦将板的刚度系数求出后，据此可以求得总体坐标的力和位移，将每一节缝处所有的力相加就得出平衡方程式，

$\textcircled{1}$  原书漏印  $\bar{u}$ ； $\textcircled{2}$  原书误为12.16——译者注。

在图 12.14 节缝 2 处:

利用式 12.19 则有

$$\bar{k}_{A_{21}}\bar{u}_1 + \bar{k}_{A_{22}}\bar{u}_2 + \bar{k}_{B_{22}}\bar{u}_2 + \bar{k}_{B_{23}}\bar{u}_3 + \bar{k}_{C_{22}}\bar{u}_2 + \bar{k}_{C_{24}}\bar{u}_4 = \bar{x}_2 \quad \textcircled{*}$$

$$\text{或 } \bar{k}_{A_{21}}\bar{u}_1 + (\bar{k}_{A_{22}} + \bar{k}_{B_{22}} + \bar{k}_{C_{22}})\bar{u}_2 + \bar{k}_{B_{23}}\bar{u}_3 + \bar{k}_{C_{24}}\bar{u}_4 = \bar{x}_2$$

当式 12.21 用节缝 1、3、4、5 和 6 的等效方程式写出时, 则得:

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{A_{11}} & \bar{k}_{A_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k}_{A_{21}} & (\bar{k}_{A_{22}} + \bar{k}_{D_{22}} + \bar{k}_{C_{22}}) & \bar{k}_{B_{23}} & \bar{k}_{C_{24}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{B_{32}} & (\bar{k}_{B_{33}} + \bar{k}_{D_{33}}) & 0 & \bar{k}_{D_{35}} & 0 \\ 0 & \bar{k}_{C_{42}} & 0 & (\bar{k}_{C_{44}} + \bar{k}_{E_{44}} + \bar{k}_{F_{44}}) & \bar{k}_{E_{45}} & \bar{k}_{P_{46}} \\ 0 & 0 & \bar{k}_{D_{53}} & \bar{k}_{E_{34}} & (\bar{k}_{D_{55}} + \bar{k}_{E_{55}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{k}_{E_{64}} & 0 & \bar{k}_{F_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \\ \bar{x}_6 \end{bmatrix}$$

①原书误为  $x$  应为  $\bar{x}$ ——译者注。

$$\text{或} \quad \bar{K}\bar{u} = \bar{X} \quad (12.22)$$

当 $\bar{K}$ 、 $\bar{u}$ 和 $\bar{X}$ 相应为整个结构的刚度、位移和荷载矩阵时，矩阵方程式 12.22 在六根节缝处每缝四个位移组成 24 个联立方程式。解出方程式得到特定荷载作用下节缝处的位移值。把这些位移代入单块板的刚度方程式内便可算出板内的力和应力。至于第 12.4 节的例题，必须对分布明显的每一荷载谐波，重复上述步骤，将其结果相加。

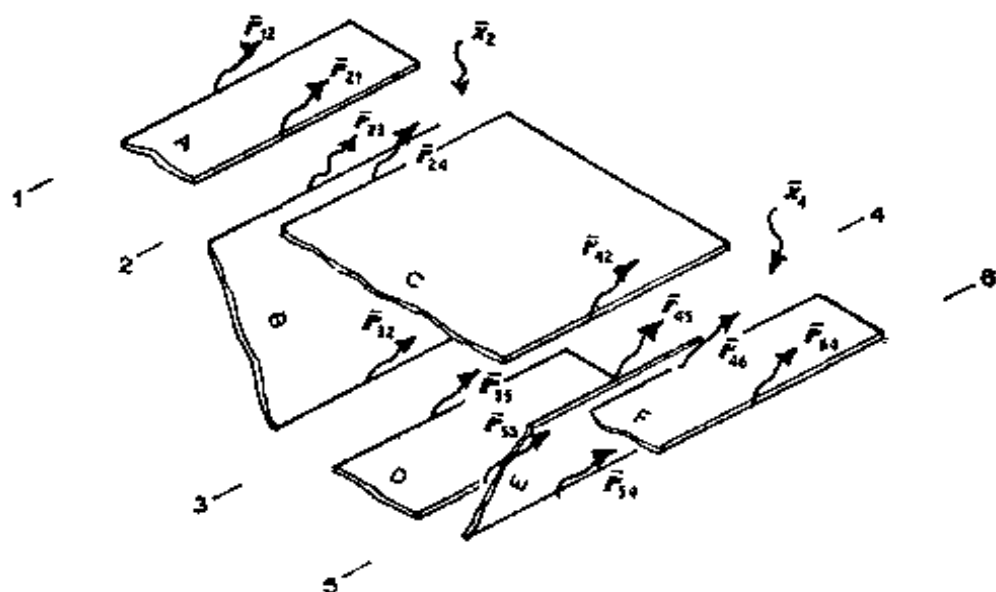


图 12.1.1 板结构的边缘的力

## 12.6 连续式和斜交式上部结构

在第 12.2 节中，假定桥梁上部结构是直交和简支的，因此只选择具有与支点重合的反弯点的荷载谐波，在支点处弯矩和挠度将自动为零。当上部结构有弹簧支承、内支承或斜桥台时，分析方法就变得十分麻烦。如果上部结构的桥台为直交但在内支点是连续的（如图 12.15 的 J 所示），则上部结构仍可视作两台之间是简支来分析。首先，对单位反力

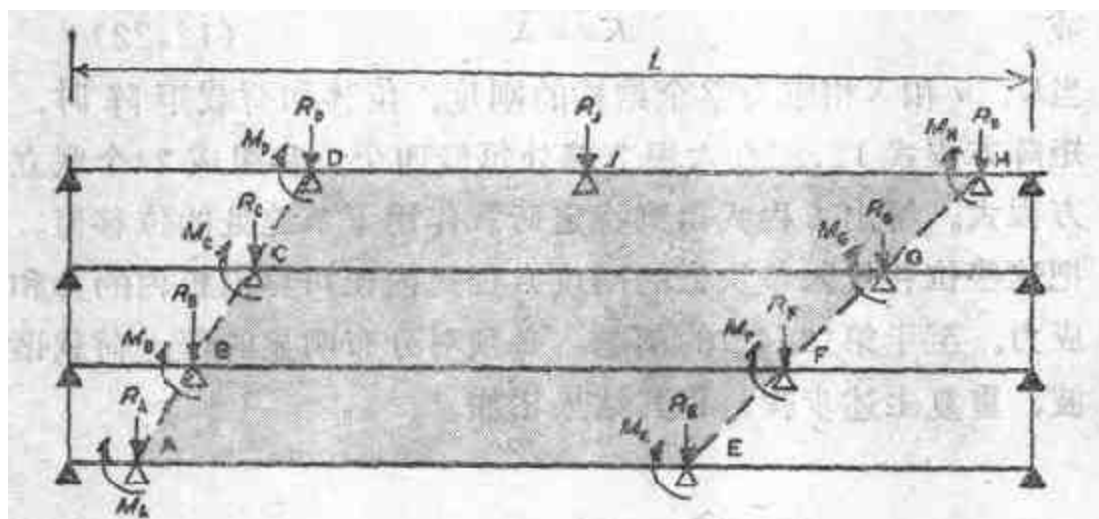


图12.15 在内支撑和斜支撑处的残余力

$R_1 = 1$ ，以及活载分别求出弯矩、挠度等的分布值，然后，调整  $R_1$  的分布值，以消除  $J$  点处由于活载（或对于弹簧支承来说，残余挠度等于  $R_1 \times$  弹簧刚度）所产生的挠度，把分布值相加就得到  $J$  点处无挠度的连续上部结构的分布值。这个原理也可用于具有任何支承条件的上部结构，包括图12.15中所示的斜桥  $ABCD$ ， $EFGH$ 。斜交式上部结构可以考虑为任意长  $L$  的较长结构的一部分，如果上部结构是简支结构，如图12.10所示，则反力  $R_A$  或弯矩  $M_A$  等等作用到结构上，这些荷载与活载组合后的分布值，使其在每一斜支承点不致引起实际挠度或弯矩。至于更复杂的结构（如图12.14所示），也可引入同支承反力一样多的独立挠度和力，并且一定得到消除或平衡，然后求解之。

## 12.7 接近陡变的谐波误差

当计算机程序使用谐波分析时，只能考虑有限数目的谐波（设为10或100）而忽略较高的谐波。如果将荷载或剪力等的谐波总和在陡变区绘成曲线，如图12.16所示，线条急

剧摆动而接近陡变。若增加谐波数目，可使摆动线位置更接近于陡变，但是振幅不减少。在此限度内摆动仍然存在，但它的范围是无限窄的。这种谐波分析的特性称为吉贝(Gibb)现象，在褶板和有限条计算机程序的输出数据中，在陡变的每一侧的区域内（包括考虑到最高谐波的两个或三个波长以内）都可能导致明显误差。因此，除非计算机沿着上部结构区分出摆动性的分布，否则在此陡变区内对于非连续函数（如：墩上的剪力）输出的结果是值得怀疑的。如果分析时，把所有不分布的高谐波集中在受载的构件内（如第12.3.3节所述），则误差可以大为避免。

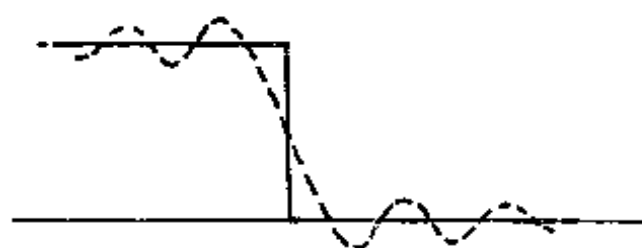


图12.16 吉贝 (Gibb) 现象

#### 参考文献

1. Kreyszig, E. (1962), *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley, New York.
2. Westergaard, H. M. (1930), "Computations of Stress in bridge slabs due to Wheel loads" *Public Roads*, 2, 1-23.
3. Pucher, A. (1964), *Influence Surfaces of Elastic Plates*, Springer Verlag, Wien and New York.
4. Rowe, R. E. (1962), *Concrete Bridge Design*, C. R. Books Ltd, London.
5. Hendry, A. W. and Jaeger, L. G. (1958), *The Analysis of Grid Frame Works and Related Structures*, Chatto and Windus, London.
6. Goldberg, J. E. and Leve, H. L. (1957) "Theory of

Prismatic folded plate Structures,"International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich, No.87 pp.71-72.

7.DeFries-Skene, A. and Scordelis, A.C.(1964), "Direct stiffness solution for folded plates, " Proc. ASCE,ST4,pp.15-47.

## 第十三章 有 限 元 法

### 13.1 引 言

有限元法是把原型的连续体分割成许多细小的单元，而在称之为节点的离散点处连接起来以分析复杂结构的方法。对于每一单元，近似的刚度方程由与单元之间的节点位移对应的节点力的关系推导出来，同样，可以为连续梁内的节点求解角变位移方程，电子计算机用来求解很大数目的与节点的力和位移有关的联立方程。由于结构划分为简单单元的基本原理可以应用到所有形状和复杂的结构，如果计算机程序写成适合的形式则对可以分析的结构类型逻辑上来说是没有限制的，因此，有限元法是目前最有效及最通用的方法，而对某些结构则为唯一最适用的方法。但是有限单元计算工作量是巨大的和费钱的，以致对于一般的结构可能不经济，还有，大量的不同的单元刚度特性的理论表达式均需要近似法，它在不同程度上影响到方法的精确性和适用性。要使这方法具有前面章节所叙述的桥梁上部结构分析的较简单方法的可靠性和使用简易性，需要更进一步的研究和发展。

这个方法系由托纳尔 (Turner) 等人[1]和克洛甫 (Clough)[2]在1950年对二维弹性结构分析而创始的，自此以后许多学者作了大量的发展。本章只不过阐明一些基本的物理原理。对该方法更详细和综合性的叙述可参见齐基威茨 (Zienkiewicz)和张佑启 (Cheung, Y.K.[3、4]，霍兰(Ho-



land)和拜耳(Bell)[5]狄赛(Desai)和埃伯尔(Abel)[6]等所著的书,对于桥梁分析的说明可阅罗肯(Rockey)、伯聂斯坦(Bannister)和依万斯(Evans)的论著[7]。

## 13.2 二维平面应力单元

首先我们从平板平面应力(或“平面内”或“薄膜内”)的分析方面来阐明有限元法。不算连续梁,这是该方法最简单的应用之一,而且关系到板和梁的板和腹板以及分格式桥梁上部结构在平面内的作用。平面以外的弯曲则较复杂将在13.3节内讨论。

图13.1a表示一梁的正面图,在图13.1b表示梁承受纯弯曲。选择这简单的结构作为例题是因为它的性能为土木工程师所熟知,但是下列讨论的一般原理可以应用到承受平面内任何系统力的任意形状的板上。为了分析,把结构考虑成为如图13.1c中所示的由仅在角隅处连接的三角形单元所构成。把三角形单元描绘成除节点外是互不相连的,以资突出沿分界处没有力的互相作用。当这样以节点联接的结构承受如图13.1d中的纯弯曲时,每一单元的变形仅与节点的移动有关。在单元的最简单的模型内,假定在以三角形边仍然保持直线的扭转变形过程中,则每一单元内的应变是均匀的,如图13.2a所示。于是在图13.1b的原型图中,45°的直线挠曲而成曲线,而在图13.1d的模型中,那些直线挠曲就成为一联串的短直线。假如模型由大量的较小尺寸的单元组成,则在模型和原型之间的差别就可以缩小。从理论的领域来说,随着无限小的单元的数量增至无限多,则模型就有效地如同原型一样成为连续体。

这简单的单元模型的刚度方程可以直接地从弹性理论平

面应力方程导出。如果假定图 13.2a 的三角形扭转变形而内部直线和边缘仍然保持直线，则位移场是线性的并且可以表达为

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (13.1)$$

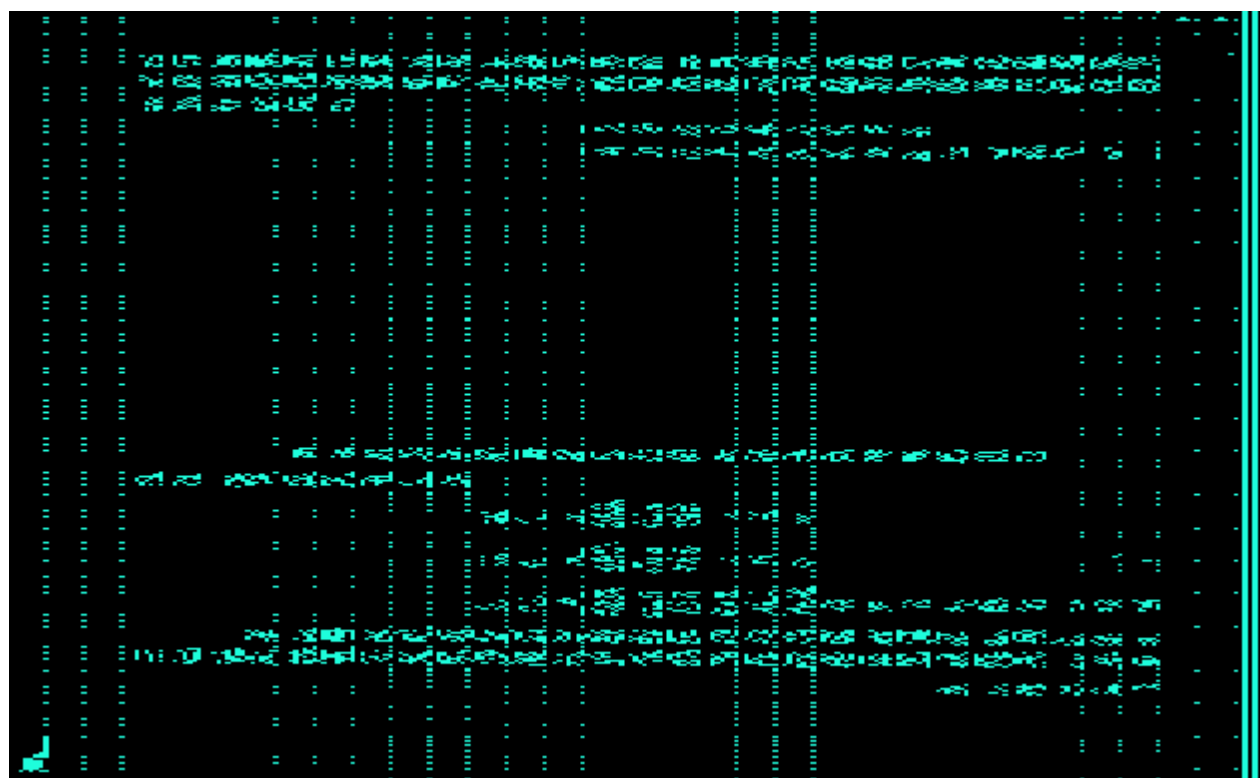


图13.1 梁的弯曲 (a和b) 原型； (c和d) 有限元模型

应变表示为：

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5 \end{aligned} \quad (13.2)$$

假如三个节点具有座标 $(x_i, y_i)$ 等，而位移为 $u_i, v_i$ ，则方程式13.1可以写成六个位移。例如 $u$ 的三个方程为

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\
u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\
u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3
\end{aligned}
\quad (13.3)$$

其中可以解出  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  和  $\alpha_3$  值, 而从  $v$  的方程中解出  $\alpha_4$ ,  $\alpha_5$  和  $\alpha_6$  值, 即得出对于节点位移的单元应变关系式

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \alpha_2 = \frac{(u_1 - u_2)(y_2 - y_3) - (u_2 - u_3)(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \\
\epsilon_y &= \alpha_6 = \frac{(v_1 - v_2)(x_2 - x_3) - (v_2 - v_3)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \\
\gamma_{xy} &= \alpha_3 + \alpha_5 = -\frac{(u_1 - u_2)(y_2 - y_3) - (u_2 - u_3)(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \\
&\quad + \frac{(v_1 - v_2)(x_2 - x_3) - (v_2 - v_3)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)}
\end{aligned}
\quad (13.4)$$

单元内的应力可以从弹性理论的平面应力方程求出, 即

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \epsilon_x + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \epsilon_y \\
\sigma_y &= \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \epsilon_x + \frac{E}{(1-\nu^2)} \epsilon_y \\
\tau_{xy} &= -\frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}
\end{aligned}
\quad (13.5)$$

假如单元是连续体的一部分, 这数值的应力将会穿过边界, 如图 13.2b 所示。然而, 这些应力是由图 13.2c 中所示的节点力来代表, 这是由每一边缘上的应力按静力分布到邻近节点而求得的。由于形成  $U_1$  和  $V_1$  的应力系与在内部切出剖面上的应力 ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ) 处于平衡, 然后并通过各边中点来表示, 就可以解出

$$U_1 = \sigma_x \frac{(y_2 - y_3)}{2} - \tau_{xy} \frac{(x_2 - x_3)}{2} \quad (13.6)$$

$$V_1 = -\sigma_y \frac{(x_2 - x_3)}{2} + \tau_{xy} \frac{(y_2 - y_3)}{2}$$

把方程13.5中的  $\sigma_x$  等代入上式；则得：

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{(y_2 - y_3)}{2} \epsilon_x + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{(y_2 - y_3)}{2} \epsilon_y \\ &\quad - \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{(x_2 - x_3)}{2} \gamma_{xy} \\ V_1 &= -\frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \frac{(x_2 - x_3)}{2} \epsilon_x - \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{(x_2 - x_3)}{2} \epsilon_y \\ &\quad + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{(y_2 - y_3)}{2} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (13.7)$$

这些方程式可以与方程13.4合并，则导出作为单元的一点的节点1的刚度方程式

$$U_1 = k_1 u_1 \quad (13.8)$$

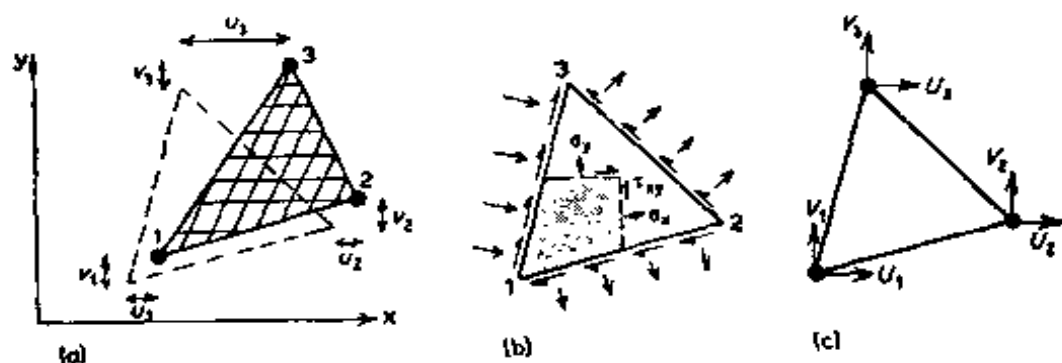


图13.2 简单平面应力三角形单元的节点位移和力  
(a)位移；(b)应力；(c)节点力

在节点1上的力与节点1，2和3的位移有关系。因此，把从邻接节点1的所有单元的力求和而计入作用荷载  $X_1$ ，则考

考虑节点 1 的平衡而提供出作为结构内点的节点 1 的刚度方程

$$X_1 = K_1[\text{节点 1 和相邻的位移}] \quad (13.9)$$

这个方程可以在模型结构内对每一节点推导出来。对  $N$  个节点形成  $2N$  个联立方程，这些方程式使用计算机解出，则可求出每一节点的位移( $u, v$ )，由此使用方程 13.4 和 13.5 计算出每个单元内的应变和应力。

图 13.3a 是由承受纯弯曲的粗网格模型计算出来的一个应力分布的示例。单元由此而产生的扭转变形则示于图 13.3b 中。由于这里只有在  $x$  方向产生应力，在每一单元内的应力是简单的与平行于  $x$  轴边的缩短成比例。因此，可以在图 13.3b 中看到，单元  $b$ 、 $c$  在  $x$  方向的压缩是相同的，而且等于  $a$  的一半，而单元  $d$  是没有应变的。图 13.4a 表示在单元  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  中受有节点力下的应力状况。在节点的两侧边缘上应力相抵销使力等于零。图 13.4b 表示在图 13.3a 中截面  $X-X$  和  $Y-Y$  所绘出的应力分布，这些可以与精确的应力分布相比较。显然，在这里对于单个单元计算所得的应力是使人误解的，然而，围绕每一节点的平均应力却提供一个估计值，与精确数值之差在 13% 以内。

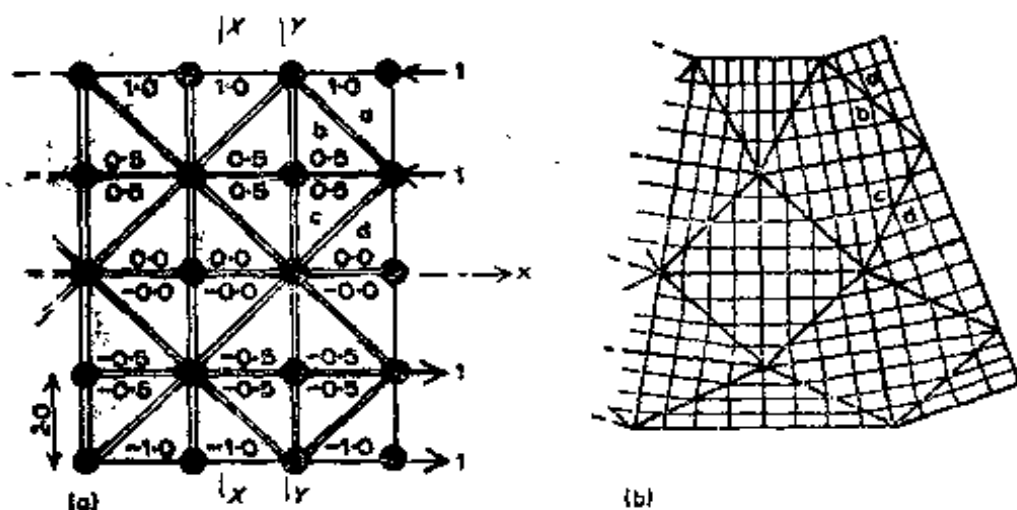


图 13.3 三角形网格的纯弯曲  
(a)  $\sigma_x$  的分布；(b) 位移场

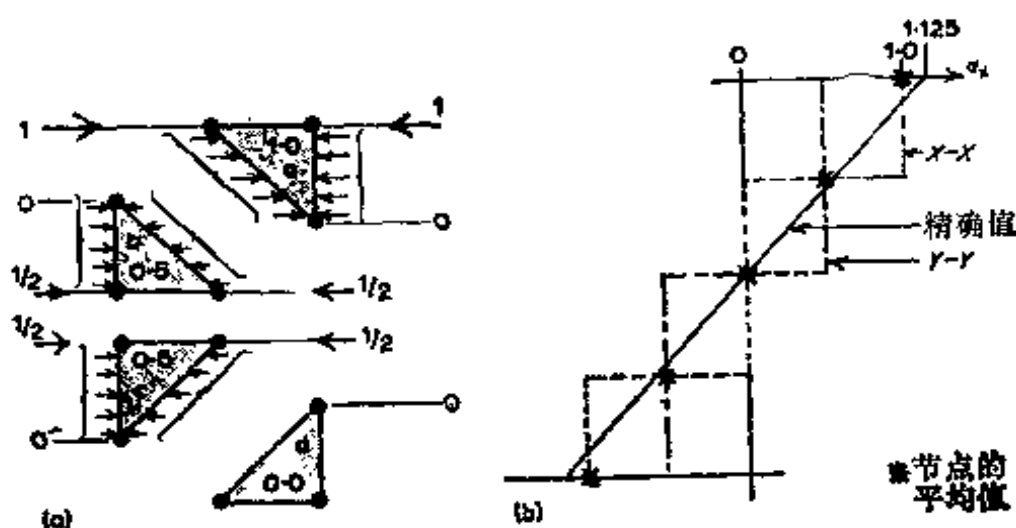


图13.4 (a)单元上的节点力和应力；(b)截面上的应力分布

对于较复杂的单元，通常不可能直接得到节点力对于单元应力和所假定的位移场的关系。

单元刚度通常从考虑贮存于所假定的位移场的位能而导出的。对于每一节点力，虚位移所作的外功等于贮存于位移场的位能最小增值。虽然使用这个数学概念能够分析较为复杂的问题，而且节省计算，但这意味着由一个程序输出的单元应力不直接地与作用荷载平衡有关。假如对于题目来说，单元位移函数定得不适当，输出的单元应力就可能低达50%或者小于那些与作用荷载相平衡所要求的数值。计算的节点平均值不会得到这样大的差值。虽然程序不断的改进在减小这种误差的可能性，建议在可能的情况下对输出单元应力和作用荷载仍作笔算，以校核其平衡。因为在过去，曾发现明显的不符合，许多设计工程师仍然相当信赖空间构架分析中的输出的杆件力会自动地与作用荷载相平衡。

如图13.5所示的一个细网格，显然，它的节点的平均应力与图13.4中的精确数值的误差在3%以内。一般来说，有限元网格愈细，得出的结果就愈精确。如图13.6中所示的一

一个相当粗的网格就可能得出不精确的结果。而且，与顶部和底部单元应力之间的差值成比例的梁的曲率是远小于图13.5所表示的。这意味着粗网格刚度比细网格刚度强得多。把网格考虑成粗得如图13.6a所示时将是明智的。虽然，这个例题是一个可以引入很大误差的鉴戒，但若这根梁是箱型板梁式上部结构的腹板如图13.6b所示，则作第一次粗算时，网格不算是粗的。当面临到分析的各种型式的可能性时，问题的要点是在于选择最适宜单元布置并校核其解答。

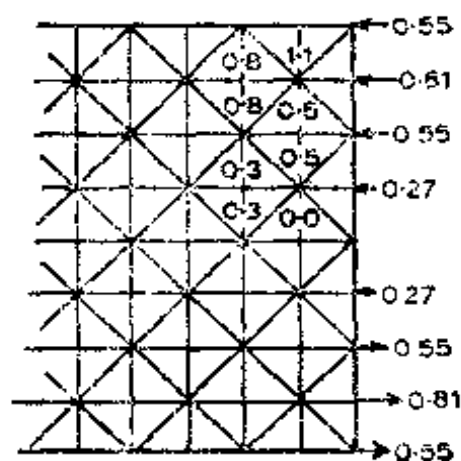
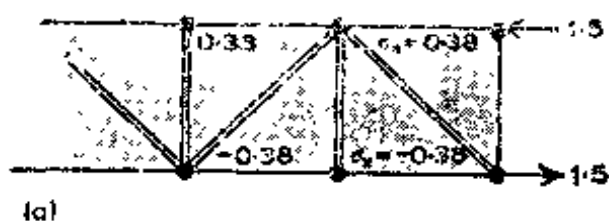
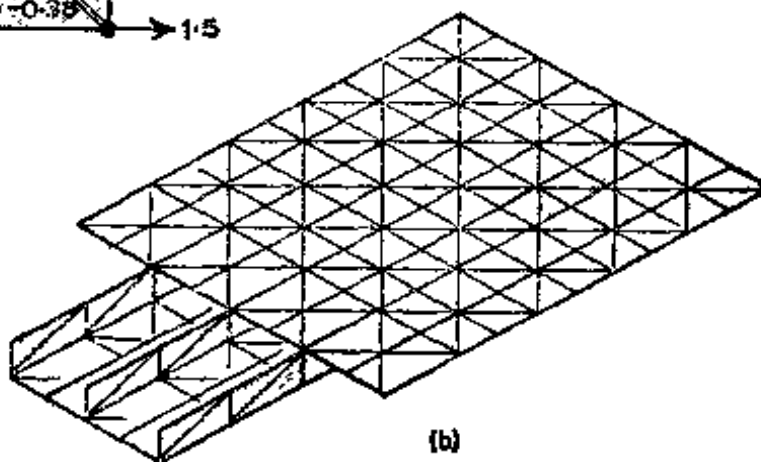


图13.5 用较粗的网格求得较精确的应力



(a)



(b)

图13.6 (a)从相当粗的网格求得的不精确应力；(b)箱形板梁的粗网格

一个模型的有限元不必是三角形的；大多数使用的其他的形状包括四边形、矩形、平行四边形和其他的多边形。图

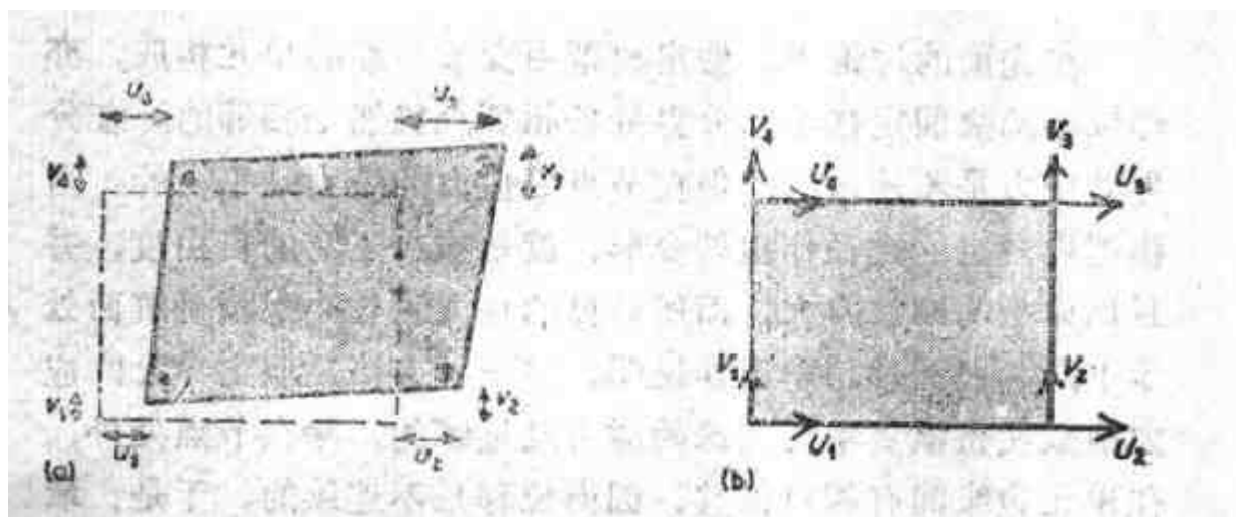


图13.7 四边形单元的节点的位移和节点力

13.7表示出矩形单元的节点的位移和力。位移可以假定为下述函数：

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \quad (13.10)$$

因而扭转变形如图 13.8a 所示一样在沿着每边缘具有线性位移（亦即应变为常数）。值得注意的是：方程 13.10 有 8 个未知数可从位移  $u_1, v_1, u_2, \dots, v_4$  的 8 个方程求得。另一种方法是假定矩形既有（图 13.8b）或(c)，或（图 13.8b）与 (c) 的平均值的一对三角形的刚度特征，其他的矩形单元亦可针对不同的目的而使用不同的位移函数来导出，特别是某些在论述腹板平面内弯曲方面得到了发展〔7〕。

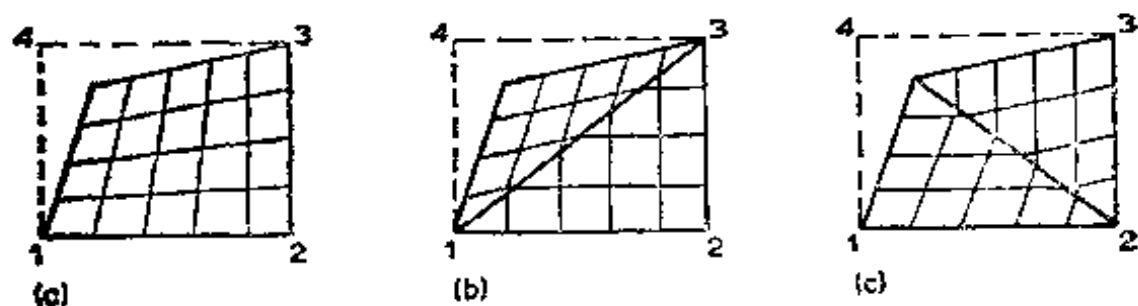


图13.8 各种简单四边形的位移场



在先前的讨论中，假定模型由变形一致的单元构成，亦即位移函数假定在单元分界处各相邻点仍然是相邻的。在分界处应力是不连续的，但在节点处应力的合力是平衡的。当模型以规定的途径作扭转变形，就是减少了它的自由度，并且比原型的刚性为大，而所计算的应力往往小于精确解而处于下限，在图13.4中已作说明。另一种方法是假定单元的应力函数使得横贯单元边缘的应力是连续的，除在节点处外，在单元边缘间有相对位移，因而位移是不连续的。于是，最终的模型比原模型柔性得多，而所计算的应力是大于精确值而处于上限。因为在理论上较复杂，故此柔度法不常使用。

### 13.3 板弯曲单元

有限元法往往用于分析板桥的板弯曲性能，基本概念和方法与平面应力相似。然而，位移与力的变量是不同的，而单元刚度方程的理论推导存在较大的理论问题。图13.9a表示一原型板式上部结构在垂直荷载下弯曲，而图13.9b表示模型可能划分为大量的三角形单元的体系。由单元所代表的原型片块经受垂直的挠度 $w$ （以及对 $w$ 求导数所得的曲率），如图13.10a所示，并沿其边缘如图13.9b所示承受弯矩，扭转和垂直剪力。这些边缘力在刚度方程中由节点力来

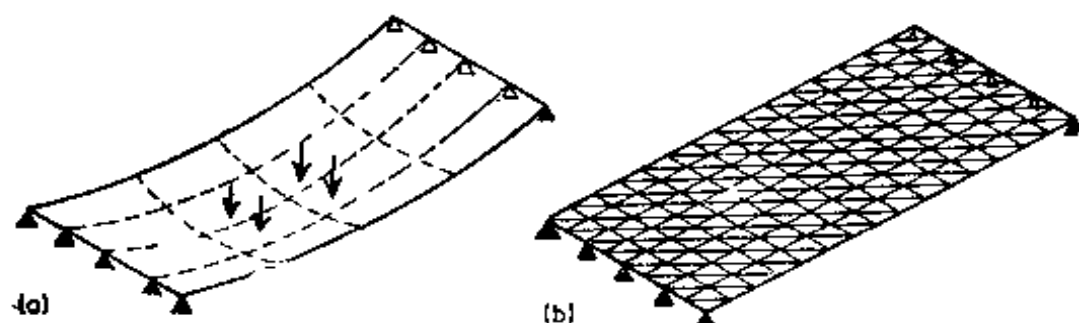


图13.9 板式上部结构的板弯曲有限元模型

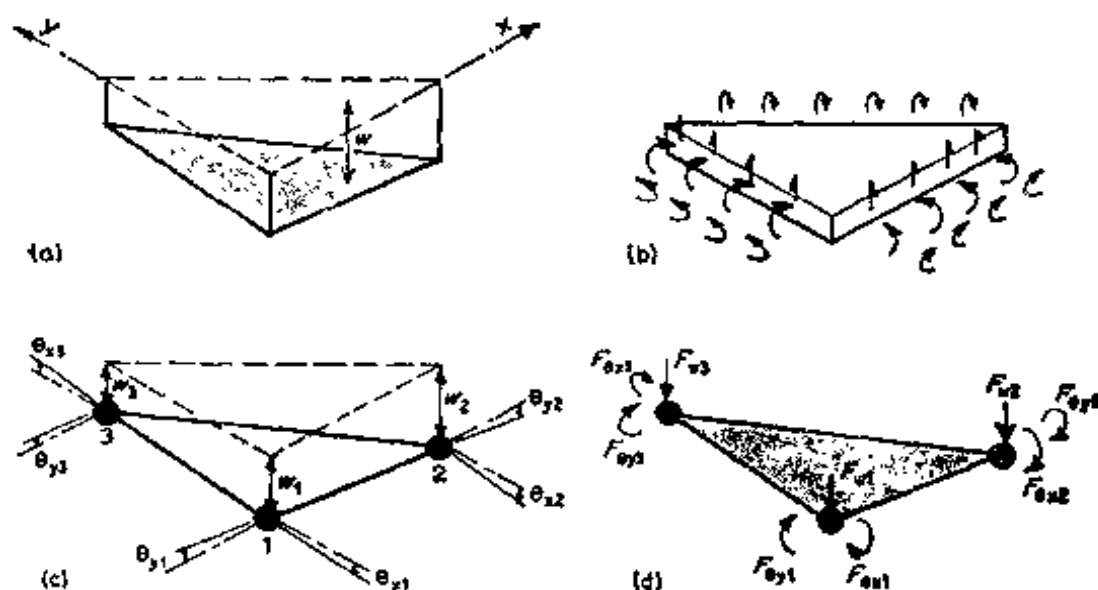


图13.10 (a)三角形板单元；(b)边缘应力合力；(c)节点位移；(d)节点力

代表，如图13.9d 所示：

$F_w$  = 垂直剪力；

$F_{\theta x}$  = 绕  $Ox$  轴弯矩；

$F_{\theta y}$  = 绕  $Oy$  轴弯矩。

相应于图13.10d中的力的节点挠度为：

$w$  = 垂直挠度；

$\theta_x$  = 节点绕  $Ox$  的转角；

$\theta_y$  = 节点绕  $Oy$  的转角。

要求出这样的一个单元的刚度，像方程13.1在平面应力单元那样，必须假定一个位移场。这里可以选择完全三次多项式，

$$\begin{aligned} w = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 \\ & + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 \end{aligned} \quad (13.11)$$

很遗憾，这里有10个系数，因此不可能从单元内9个位移变量  $w_1$ 、 $\theta_{x1}$ 、 $\theta_{y1}$  等求出，必须消去一个系数或使两个系数相等 ( $\alpha_8 = \alpha_9$ )，从而建立一个近似而且有点任意的办法（这

才可能解题，对于三角形单元常使用另一座标系统称之为面积座标，参见文献〔3〕所述）。沿着任何边缘，例如取  $y =$  常数，方程式 13.11 给出  $w$  为  $x$  的三次函数；在界面两侧这将是相同的，因为具有 4 个系数的三次式是由 4 个点位移所能唯一确定的。然而法向斜率  $\partial w / \partial y$  却是具有 3 个系数的  $x$  的二次式，而且由于在边缘上仅有两个待定的节点变量，即

$$\theta_{x_1} = \left( -\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \quad \text{和} \quad \theta_{x_2} = \left( -\frac{\partial w}{\partial y} \right)_2$$

边缘的法向斜率没有唯一确定，故界面两侧的单元的斜率是可以不同的。所以，如图 13.11 所示，虽然垂直挠度是连续的，但除节点外在单元之间界面处显得不顺滑。因为完全多项式对待定自由度的数目是太广了，所以单元不是真正变形一致的，可称之为“不相容”。

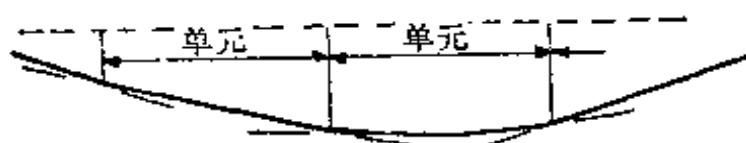


图13.11 节点间单元边缘处斜率的不连续性

简单的矩形单元（如图 13.12a 所示）也是不相容的，因为具有足够的系数来描述挠度的最低阶多项式是具有 16 个系数的 4 阶式，而单元却仅有 12 个待定的自由度。许多其他设想的弯曲单元也是不相容的。然而，有某些如图 13.12b 所示的单元却是“相容”的。在这一例中，单元待定自由度的数目由于每边中点增加附加节点而增加。在这些节点处，法向斜率  $(\partial w / \partial s)$  是具有弯矩节点力的位移的变量。在这个具有 16 个系数的 4 阶完全多项式可以用 16 个自由度来求解。则沿着任一边缘作二次方变化的法向斜率可由两个端节点和一个中间节点的三个数值所唯一确定。

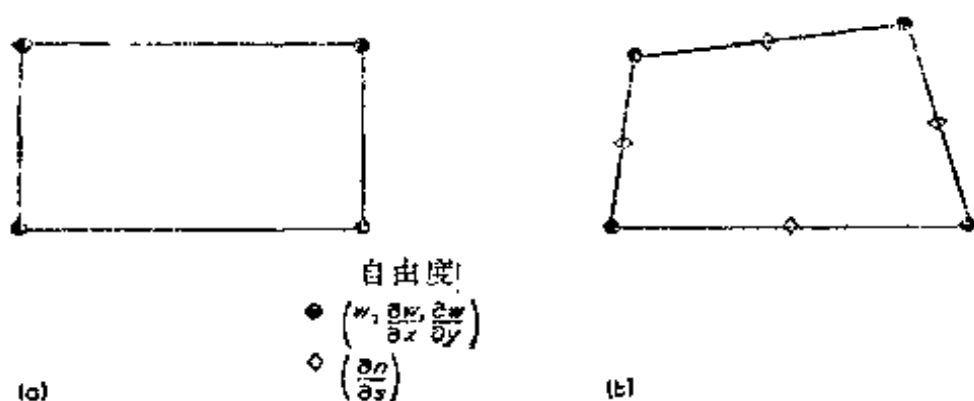


图13.12 四边形板弯曲单元

(a)不相容; (b)相容

对于单元刚度方程, 通常如第13.2节所提供者是用虚功法导的。对节点的每一个自由度给出一个虚位移, 而相应的节点力按照所假定的位移函数所储存的位能的最小增值与外功相等而求得。

由变形一致相容的单元所求的解答往往是处于下限的, 因为当结构可能变形的途径受到完全限时, 模型结构是较刚性的。反之, 由不相容的单元求得的解答既不在下限也不在上限。它们既不满足整个结构对于下限的最小位能解的相容性, 也不满足整个结构对于上限最小余能解的平衡性。不相容单元将得到比同一形状的相容单元的下限为高的应力, 因为在调整已挠曲的外形中, 由于它有较大的自由度, 所以刚度很小。有时, 反过来说, 简单的不相容的三角形或矩形单元可能给出比许多改进的相容单元有更好的解答。这是一个非常节约的办法, 因为在计算机操作上相容单元是很麻烦的, 因此不相容三角形或多边形单元广泛地用于板式桥梁。三角形通常是使用较广泛的, 因为它可以毫无困难适应于复杂的设计模型的上部结构, 如图13.13所示。

在讨论弯曲单元之前, 值得注意的是简单的梁单元, 如图13.14所示, 它可以用来代表在板平面内有加劲梁的情形。

因为梁传递扭转以及弯曲，它的节点有三个自由度，正如板节点一样，节点力包括垂直剪力，弯矩和扭矩。它是一个梁格模型的基本单元，这个梁格模型本身可以考

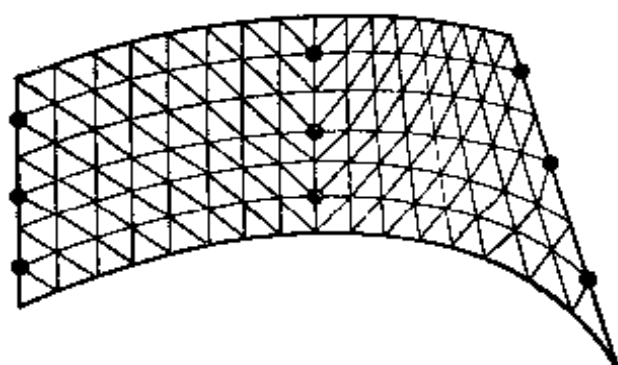


图13.13 分成三角形单元的板式上部结构

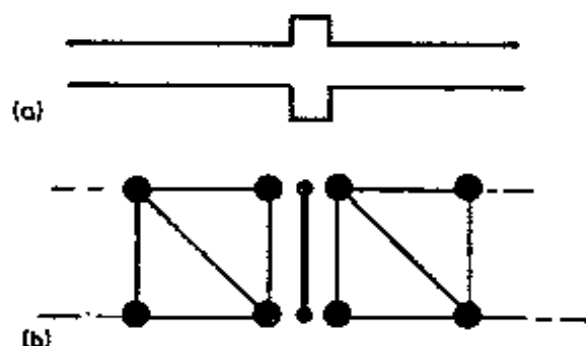


图13.14 位于三角形单元之间的梁单元  
(a)用梁加劲的板截面；  
(b)具有梁单元的有限单元平面

虑为一个简单的有限元模型。梁格是不相容的，因为不考虑到在除节点外单元之间挠度的变形一致性或应力的平衡性。要注意到，在图13.14中的平面内的梁，当它在代表由于设在梁板

式上部结构的面板以下的梁时，其所引起板的薄膜作用情况与梁格梁一样。因此，一个二维板弯曲有限元分析会产生比这类上部结构的梁格更可靠的结果是不大可能的。只有三维分析模型才能够作出更精确的估算值。在另一方面，如果泊松比很大，以致在板的弯曲方程式3.5或3.9中有相互影响时，用细网格的二维有限元分析将产生比平面板式上部结构梁格更精确的结果。

## 13.4 三维板结构和壳单元

一座梁板式或分格式桥梁上部结构的详细研究需要作三

维分析。一般来说，尽管能够使面板和腹板接近到薄板的性能，但这些都必须布置成如图13.15所示三维体系。

在不同平面内的板的每一相交处，某一板承受平面以内的力而另一板承受平面以外的力，它们两者之间是相互作用的，反之亦然。由于这个原因，对使用有限元来说，必须使单元在平面应力以及板弯曲下能发扭转变形。因为对于平板是假定作用在平面以内和平面以外的力在板内不相互影响的。实际上，单元是与类似于板弯曲单元（见第13.3节）的平面应力单元（见第13.2节描述）相同的。

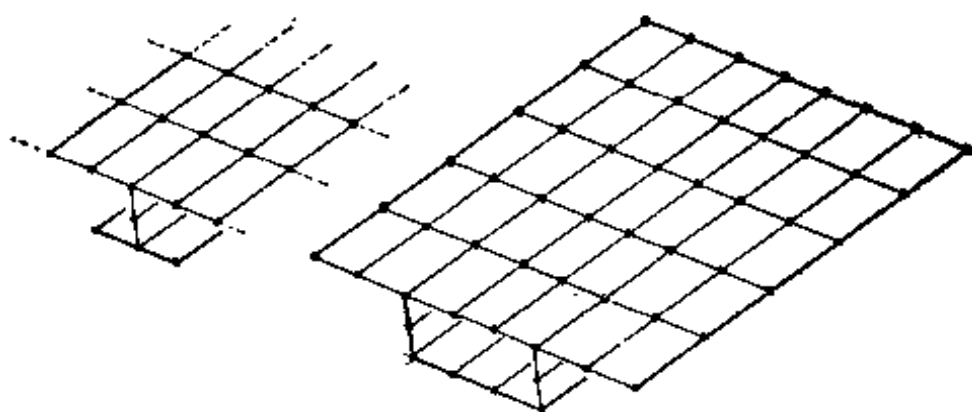


图13.15 由板单元构成的三维结构

要注意到虽然单元单个地对于平面应力和弯曲是相容的，但除节点处外沿着腹板与面板相交处的位移通常不是变形一致的。由于在第13.2节中所讨论过的理由，简单的三角形单元对于此种三维分析是不适宜的，除非使用极细的网格，然而，能够代表腹板在平面内弯曲的特别单元则是有效的。

对于分格式梁的复杂性是没有逻辑限制的，桥梁的结构形状或支承体系可以用三维板的模型来分析。然而，每一节点必须有6个自由度，即三个挠度和三个转角，即使是比较简单的结构所形成的刚度方程式数目也很大，求解是很不合

算的。因此，这方法通常仅用于研究结构在一跨度内或错综复杂部分的应力分布，然后把些结果用于说明应力合力的分布，例如由连续梁、梁格或空间构架的简单模型所输出的全部弯矩。

壳结构例如拱，通常可以用板单元来分析，如图13.16a所示。然而，如在图13.16b中所示的壳单元是有效的。在这种单元中，在平面内和平面外的力在整个单元上都发生相互影响而不只限在节点上。

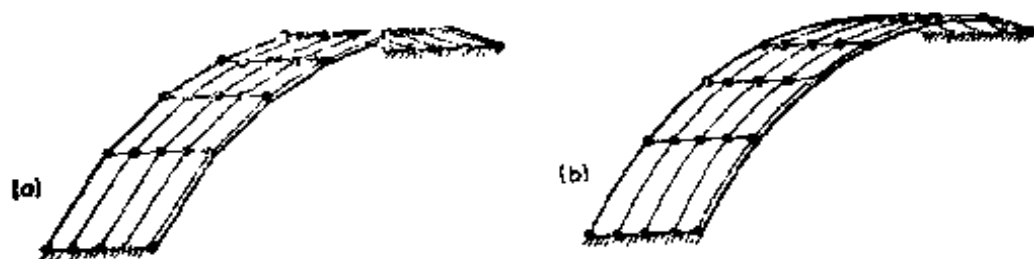


图13.16 拱结构  
(a)拱结构板单元；(b)拱结构壳单元

## 13.5 有 限 条

从这一端到另一端具有相同的横截面的桥梁上部结构，可以用简单而经济的某种有限元类型来分析。这种类型称之为有限条，此法是由张佑启 (Cheung, Y.K.) [8] 创始，是非常相似于如第十二章所述的褶板分析。如图13.17a所示，结构系假定由称之为“条”的有限单元来组成，该条系从上部结构的这一端延伸到另一端。条间用节缝连接，节缝也是从这一端走向另一端的。与褶板理论相似，对于条的平面内和平面外变形的位移函数型式为：

$$\omega, \theta, u \quad \text{或} \quad v = \sum f(y) \sin\left(-\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (13.12)$$

式中  $x$  为沿结构方向而  $y$  为条的横贯方向。如第十二章所述，如果上部结构假定有直交的端支承横隔板以阻止板端在横隔板平面内的位移，则谐波分析将大为简化。刚度方程式的推导步骤仍然是相同的，依次解出每一荷载的谐波分量，把结果叠加就得到总应力的分布。此外，由于吉贝 (Gibb) 现象在陡变附近可以遇到类似的误差 (见第12.7节)。在有限条法中，横向函数  $f(y)$  系假定为简单的多项式，因而实际上对于精确的弹性隔板法来说这个方法是近似的，在该法中，这些函数为复杂的双曲线形式，如同方程 12.16 所示。这个近似值的一个结果是所计算的应力在条的界面处横向上是不连续的。图 13.18 表示一根具有两格室的主梁在平面内剪应力分布的输出资料。该主梁是具有两根主梁的混凝土上部结构的一部分。计算机的输出资料表明了面板以内条的界面处剪力流是不连续的，从物理意义上看，这些不连续性是不可能出现的，它必须形成光滑“合理协调”的线条。这里还把按第五章的梁格法计算出来的剪力流表示于图中以资比较。

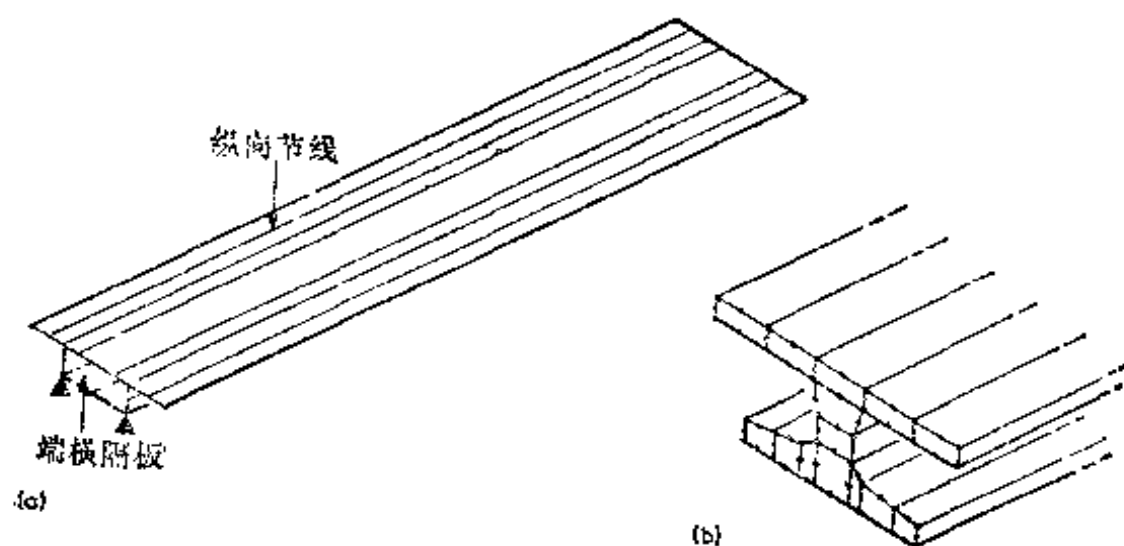
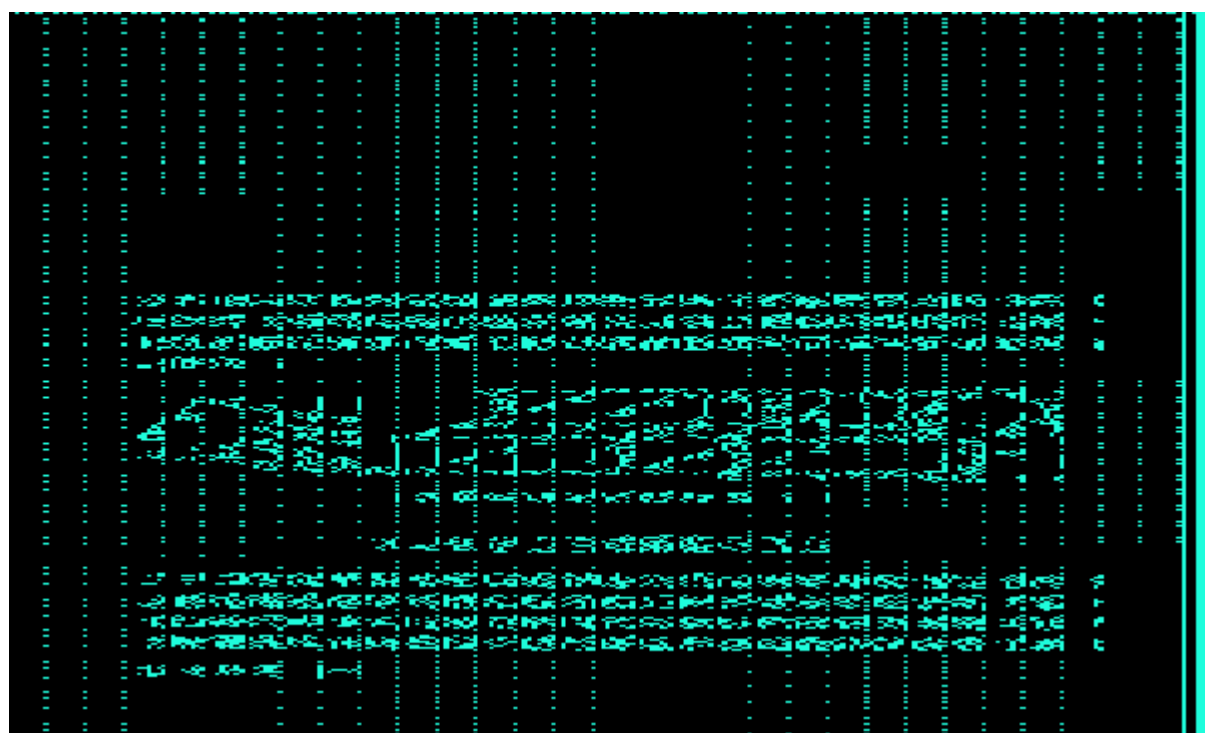


图 13.17

(a) 箱型上部结构有限条模型；(b) 有限等截面条模型





如果采用两维位移函数，则谐波分析还可以用于分析如图 13.17b 所示的等截面结构。而且，这个方法和有限条分析法已发展到把谐波函数用于沿圆弧变化的曲线式圆形结构上。

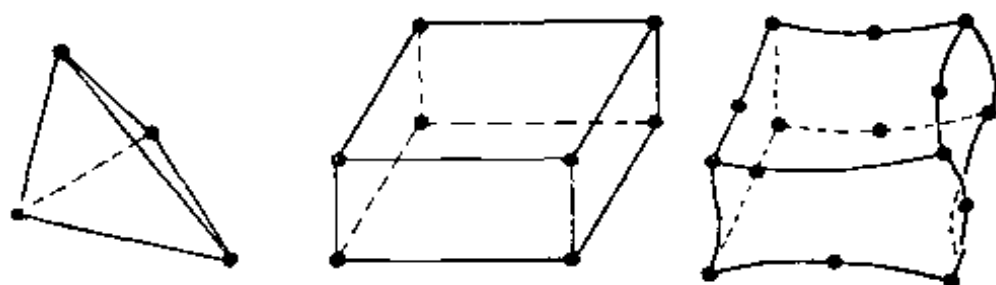


图13.19 三维实体单元

## 13.6 三 维 单 元

三维实体单元很少用于桥梁上部结构的分析，因为一般来说，这些结构尽可能用最薄的板构成以减轻重量。实体单元较普通的用于核反应堆和复杂的土壤构造的分析。最简单的单元是由在角点处具有节点的四面体或六面体组成的，如

图 13.19a 和 b 所示。若网格细，在三维中对于位移，节点仅需要三个自由度。较改进的单元是除这些角点处又有附加的节点，而具有更多的自由度。

## 13.7 结 语

在目前，有限单元法是有效的和通用的分析方法，因为使用足够大型的计算机，就能够精确地分析近乎任意的结构的弹性性能。由于这个原因，它往往由于用户的需要被推荐到用户，以表明能够执行最精确的分析。很遗憾，此法麻烦，而且通常费钱。另外还有，单元型式的选择尽可能是精密的，而且假如选择不正确，其结果可能远远比那些由简单模型（如梁格或空间构架）所估算的值更不精确。然而，在目前，尽管这个方法发展得如此迅速，但有限元计算的工作仍是一件很花时间的工作，这种工作不可能由负责设计的高级工程师进行，这也许是最大的缺点，也不可能有时间去了解或者证明单元刚度的合适程度或去校核计算机的大量数据。尤其是，结构相当复杂时，以致不能用简单的物理推论做数量校核，则对其结果难以相信。由于这个理由，当用有限元分析时，建议检验计算机机构和考核包括有丰富程序经验的管理人员，要在相似的结构问题运算上对程序作出彻底的考查。此外，假如结构相当复杂，不能应用物理推论时，这就值得用不费钱的简单空间构架分析来作独立的校核。

### 参考文献

1. Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J. (1956), "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," J. Aero. Sci., 23, 805-23.
2. Clough, R. W., (1960) "The finite element in plane

Stress analysis,"Proc.2nd A.S.C.E.Conf.on Electronic Computation,Pittsburgh,Pa.,Sept.

3.Zienkiewicz, O.C.and Cheung, Y.K.(1967), The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics,McGraw-Hill,New York and London.

4.Zienkiewicz, O.C.(1971),The Finite Element Method in Engineering Science,McGraw-Hill,London.

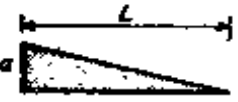
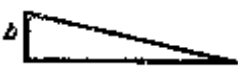
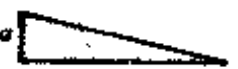

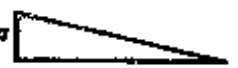


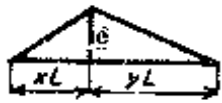

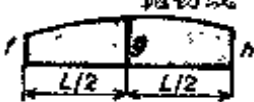

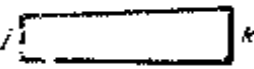

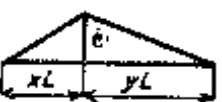
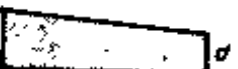
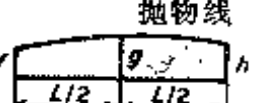
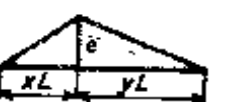


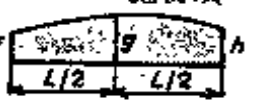
5.Holand, I.and Bell K.(1969),Finite Element Method in Stress Analysis,Tapier,Trondheim,Norway.

6.Desai, C.S.and Abel, J.F.(1972), Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold, New York.

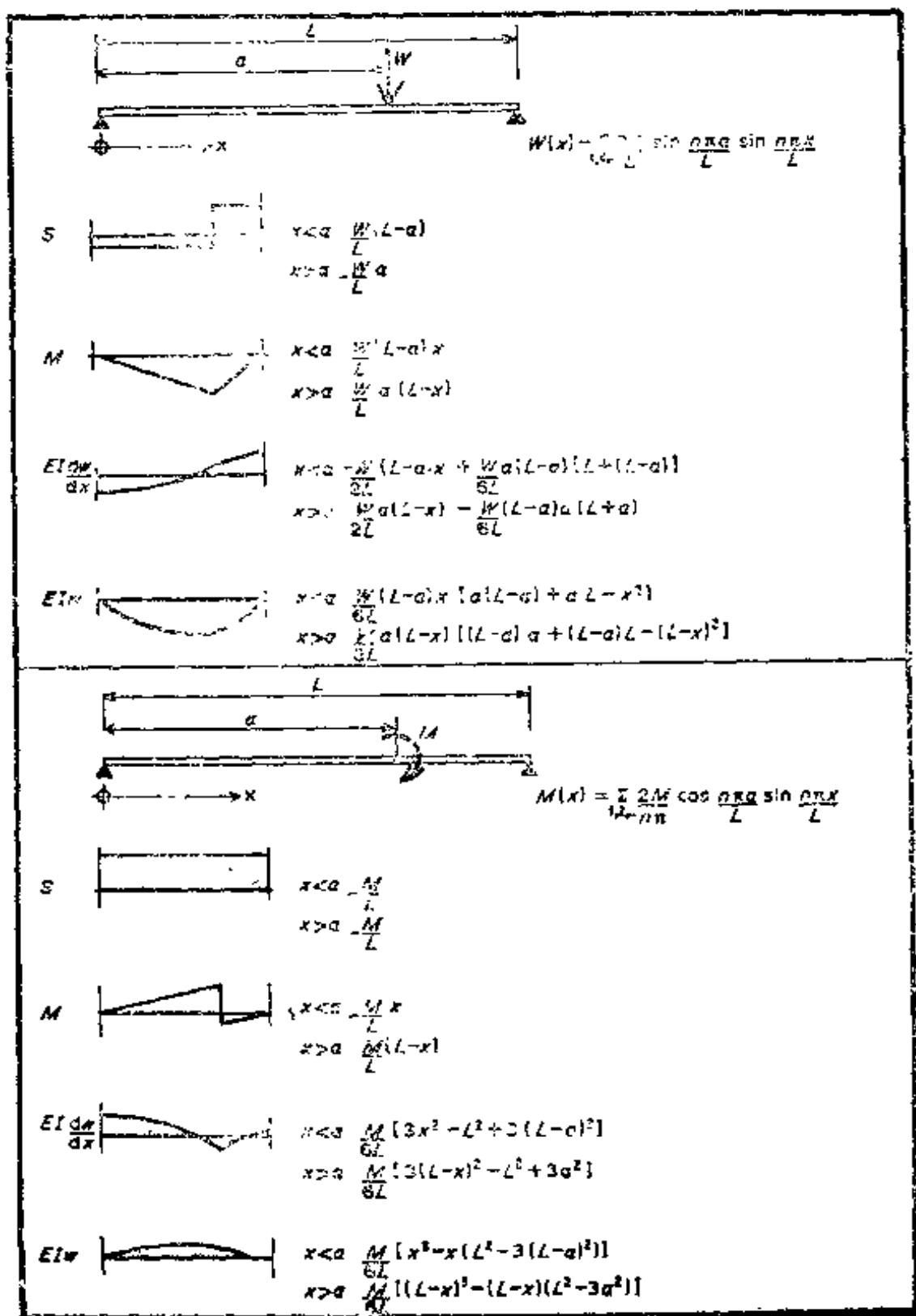
7.Rockey, K.C., Bannister, J.L.and Evans, H.R. (1971)(eds), Developments in Bridge Design and Construction,Crosby Lockwood,London.

8.Cheung, Y.K.(1968),"The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends,"Proc.Inst.Civ.Eng.,40,1-7.

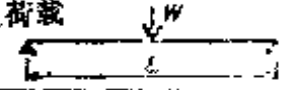
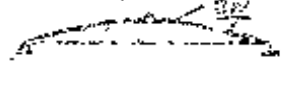
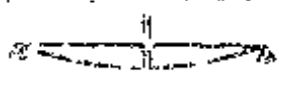
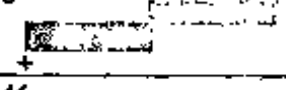
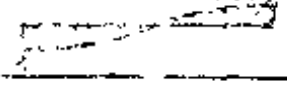
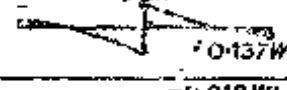

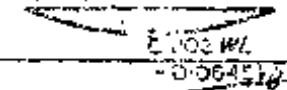
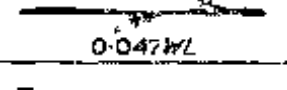
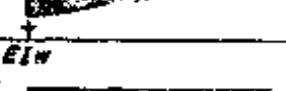
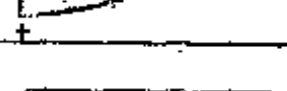
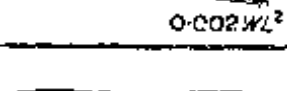
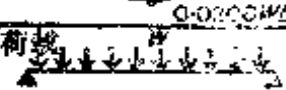
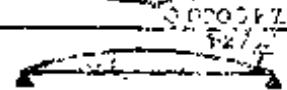
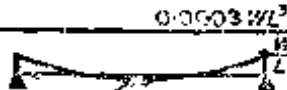
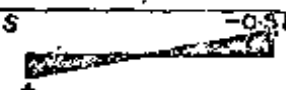
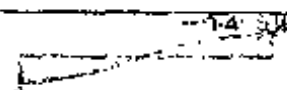
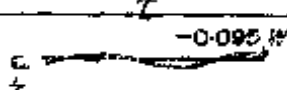
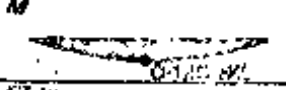
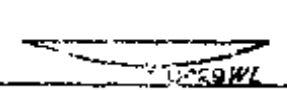
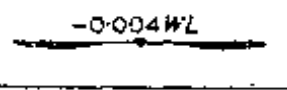
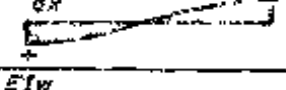
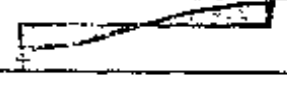
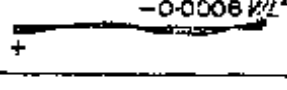
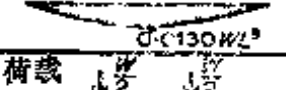
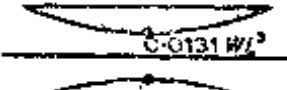
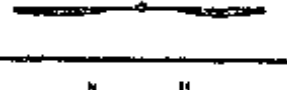
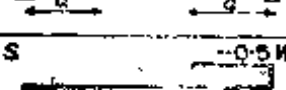
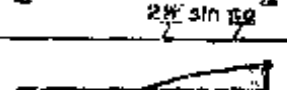
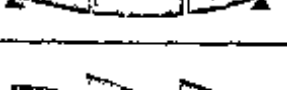
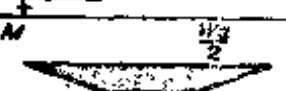
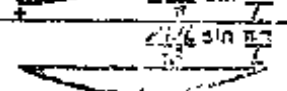
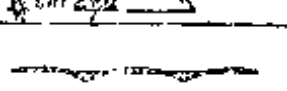
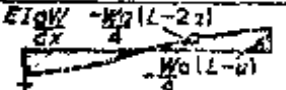
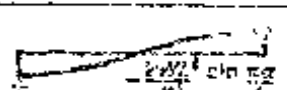
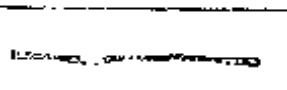
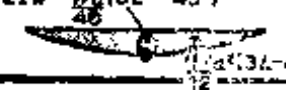
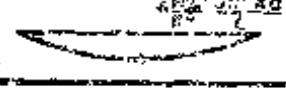
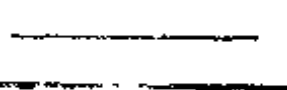

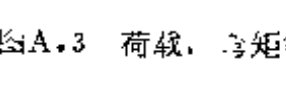
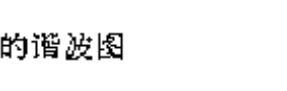
# 附录 A 乘积积分, 单跨上的 荷载函数, 谐波分量

$m_1$	$m_2$	$\int m_1 m_2 dx$
		$\frac{L}{3} ab$
		$\frac{L}{6} ab$
		$\frac{L}{6} a(2c+d)$
		$\frac{L}{6} ae(1+y)$
		$\frac{L}{6} a(f+2g)$
		$\frac{L}{6} [c(2f+k) + d(2k+f)]$
		$\frac{L}{6} e[c(1+y) + d(1+x)]$
		$\frac{L}{6} [c(f+2g) + d(h+2g)]$
		$\frac{L}{3} e^2$
		$\frac{L}{6} e[fy^2 + hx^2 + 2g(1+xy)]$

图A.1 乘积积分



图A.2 单跨上的荷载函数

荷载	第一谐波	较高谐波总和	谐波振幅
			$n=1,3,5,\dots$ $\frac{2W}{L} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{4W}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$
			$\frac{8WL}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$

图A.3 荷载、弯矩等的谐波图

## 附录 B 梁板式和分格式上部 结构的近似褶板法

### 符号

#### 下标

- 0, 1, …… 节点、梁或腹板的数目  
 $x, y, z$  力的方向、或弯矩、扭矩、转角、惯性矩  
 计算所绕的轴的方向

$b$  图 B.10“梁”截面的特性

#### 上标

- ' 与分格式上部结构的顶板有关的符号  
 " 与分格式上部结构的底板有关的符号

#### 记号

- $A_1$  腹板 1 的横截面面积  
 $A_{b1}$  图 B.10 中, ‘梁’ 1 的横截面面积  
 $A_{01}$  板条 0—1 的横截面面积; 对于分格式上部结构  

$$A_{01} = l_{01}(d'_{01} + d''_{01})$$
  
 $a_{01}, a_{11}, \bar{a}_{01}$  刚度方程中的系数  
 $b_{01}, b_{11}, \bar{b}_{01}, \bar{b}_{01}$  刚度方程中的系数  
 $C_{b1}$  图 B.10 中, ‘梁’ 的抗扭常数  
 $c_{01}, c_{11}, \bar{c}_{01}, c_1$  刚度方程中的系数  
 $c_{y01}$  每单位长度的板的横向抗扭常数; 对于分格式  
 上部结构  $c_{y01} = c'_{y01} + c''_{y01} = 2i_{01}$   
 $D$  算子  $D = d/dx$   
 $d_{01}$  板条 0—1 的厚度; 对于分格式上部结构  

$$d_{01} = d'_{01} + d''_{01}$$
  
 $d_1$  腹板 1 的厚度

- $E$  杨氏模量
- $e_{01}, e_{11}$  刚度方程中的系数
- $f_{01}, f_{11}$  刚度方程中的系数
- $G$  剪切模量
- $g_{01}, g_{11}$  刚度方程中的系数
- $h_{01}, h_{11}$  刚度方程中的系数
- $I_{b/}$  图 B.10 中, 绕  $Ox$  ① 轴的“梁”的惯性矩
- $I_{y1}$  腹板 1 绕通过形心的水平轴的惯性矩
- $I_{z1}$  腹板 1 绕通过形心的垂直轴的惯性矩
- $I_{z01}$  板条 0—1 绕垂直轴的惯性矩
- $I_{01} = I_{01}^0 + i_{01}l_{01} =$  板条 0—1 绕水平轴  $Oy$  的惯性矩
- $I_{01}^0 = A_{01}'Z_{01}^{'2} + A_{01}'' + Z_{01}''^2$
- $i_1$  腹板 1 每单位长度绕纵向轴的惯性矩
- $i_{01}$  板条 0—1 每单位长度的惯性矩  $= d_{01}^3/12$ : 对于分格式上部结构  $i_{01} = i_{01}' + i_{01}''$
- $j_{01}, j_{11}$  刚度方程中的系数
- $k_{01}, k_{11}$  刚度方程中的系数
- $L$  桥台间跨径
- $l_1$  顶板与底板中面间腹板 1 的高度
- $l_{01}$  板条 0—1 的宽度
- $M_{y1}$  腹板 1 的横截面上绕  $Oy$  的弯矩
- $M_{z1}$  腹板 1 的横截面上绕  $Oz$  的弯矩
- $M_{x01}$  板条 0—1 横截面上平面内弯矩
- $m_{10}$  板条 0—1 每单位长度在边缘 1 处弯矩
- $m_1', m_1''$  腹板 1 顶边和底边上的弯矩
- $N_1$  作用于节点 1 上的弯矩

① 似应为  $ox$  轴——译者。



- $n$  谐波数目
- $n_{01}, n_{11}$  刚度方程中的系数
- $P_1$  腹板 1 的横截面上的拉力
- $P_{01}$  板条 0—1 的横截面上的拉力
- $P_{10}$  板条 0—1 边缘 1 上侧向平面内的力
- $r_{10}$  板条 0—1 边缘 1 上纵向剪力
- $S_{y1}$  腹板 1 横截面上的侧向剪力
- $S_{z1}$  腹板 1 横截面上垂直剪力
- $s_{10}$  板条 0—1 边缘 1 上向下的剪力
- $T_1$  腹板 1 内绕  $Ox$  的纵向扭矩
- $t_{10}$  板条 0—1 内的横向扭矩
- $u$  节点的纵向伸长
- $v$  节点的侧向挠度
- $w$  节点的垂直挠度
- $Ox, Oy, Oz$  纵向的、横向的和垂直的轴
- $X_1, Y_1, Z_1$  作用在节点 1 上的纵向, 横向和垂直荷载
- $z'$   $Oy$  以下至顶板中面的距离
- $z''$   $Oy$  以下至底板中面的距离
- $z_{b1}$  图 B.10 中  $Oy$  以下至“梁” 1 的形心的距离
- $\bar{z}_1$   $Oy$  以下至腹板 1 形心的距离
- $\alpha = n\pi/L$
- $\epsilon_x$  纵向拉伸应变
- $\epsilon_y$  横向拉伸应变
- $\nu$  泊松比
- $\sigma_x$  纵向拉应力
- $\sigma_y$  横向拉应力
- $\phi_1$  腹板 1 对节点的倾斜转角, 绕  $Ox$  顺时针转

$\phi_1'$  腹板 1 的顶边转角, 绕  $O_x$  顺时针转

$\phi_1''$  腹板 1 的底边转角, 绕  $O_x$  顺时针转

### B.1 结构的界限与假定

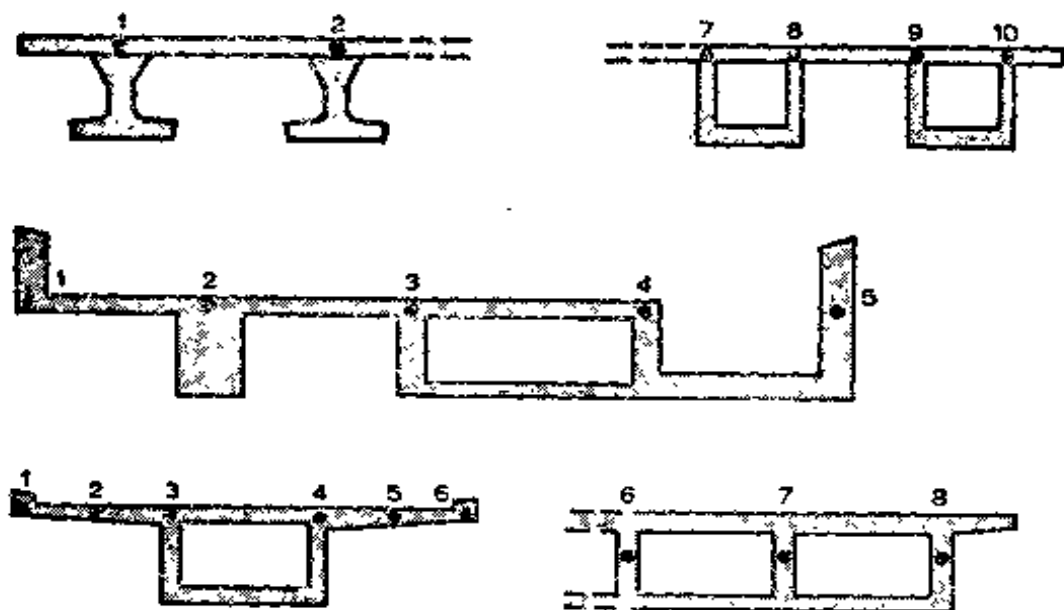
附录内容为使用程序计算机推导梁板式和分格式桥梁上部结构的一套简单刚度方程式。这些方程式曾用于推导第十章图表的荷载分布。

这方法限于下列的上部结构使用:

(1) 简支式。

(2) 所有面板是水平和腹板是垂直的等截面结构, 如图 B.1 所示。

(3) 支点为直交, 并在每端部有一垂直的横隔板以阻止上部结构在横隔板平面内的位移。



图B.1 具有正交单元的等截面上部结构的横截面

结构单元状况作下列方面假定:

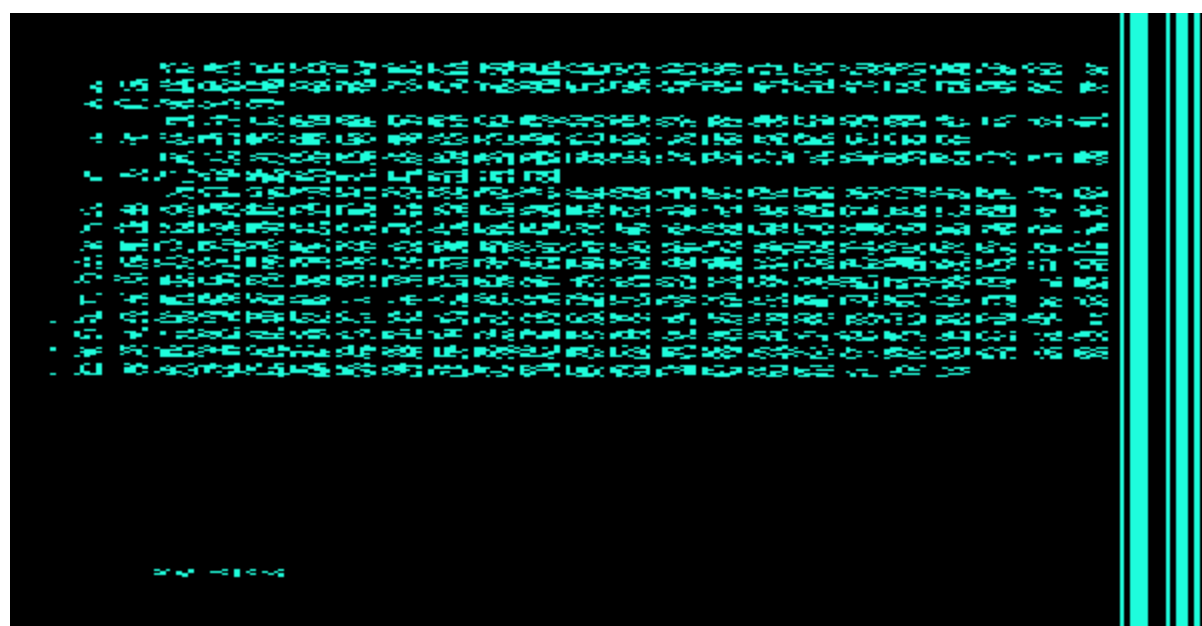
(4) 梁和腹板按照简单梁理论垂直挠曲和压缩, 腹板的剪切变形对于普通的设计荷载相对地是不明显的, 并可略去。

(5) 水平板按照简单梁理论作侧向挠曲、扭转变形以及在平面内压缩。剪切变形考虑变形后仍然保持为平面的截面假定。

(6) 板在平面外的横向弯曲是单向的。横向弯矩有一由于纵向弯曲的泊松比影响的分量，参与纵向弯曲作用。

(7) 桥面板中的纵向弯矩及扭矩为相邻梁或腹板中的纵向弯矩及扭矩的“总括”。

刚度方程式涉及到荷载与梁或腹板的挠度的第  $n$  个谐波分量的幅度，图 B.2 示出上部结构的一个平面，它的整个长度等于第  $n$  个谐波的半波长。对于最实用的简支上部结构，通常发现高于第一谐波的谐波，它从受载梁分布到的数值很微小。因此，方程只需用第一谐波就可以了。这个谐波在图 B.2 中的跨度取桥台间的跨径。计算出相应于梁和腹板的纵向节点 1、2、3……的力和挠度。对于板式上部结构，节点的间距是任意的。然而，当半波长小于三倍的节点间距  $l$  时，这个方法的近似值会导致误差。因此，如果所要求在板式上部结构内接近集中荷载位置处有数据，则节点间距必须局部的不超过最高谐波所要求的半波长的三分之一。



分格式分析系考虑到一具有不止一块平板，故梁板式上部结构可以考虑为具有底板厚度为零的分格式上部结构。

## B.2 腹板的平衡

图 B.3 示出作用在分格式上部结构腹板 1 单元上的力。 $Ox$  是沿跨径方向， $Oy$  是横向而  $Oz$  垂直向下。在本附录中原点设于跨中，刚度方程式由各个力和位移的谐波幅值的关系导出，而这些数值不受原点位置影响。参照节点假定在  $Oxy$  平面内，（此处）它可与上部结构不在同一水平面上。腹板形心则在节点以下  $Z_1$  处。图 B.3a 示出作用在节点上的力； $X_1$ ， $Y_1$  和  $Z_1$  为各座标轴方向上的力， $N_1$  为横向弯矩。下列的分析略去节点之间的荷载。因此， $Z_1$  计入由于相邻板上作用的荷载所引起的固定边缘剪力，而  $N_1$  计入固定边缘弯矩。

(B.3b) 示出腹板上与相邻面板相互作用的力。上标 ' 表示顶板有关的符号而 " 表示底板有关的符号。力  $m$  和  $s$  系从横向的板弯曲求得，而  $p$  和  $r$  从板的平面内扭转变形求得。

(B.3c) 示出横贯腹板截面的力，包括弯矩和双轴弯曲的剪力、拉力  $P_1$  和扭矩  $T_1$ 。

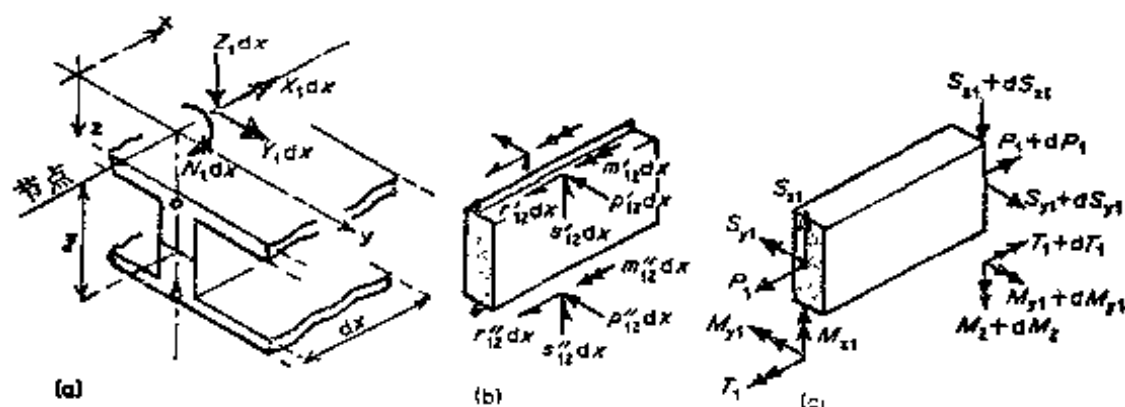
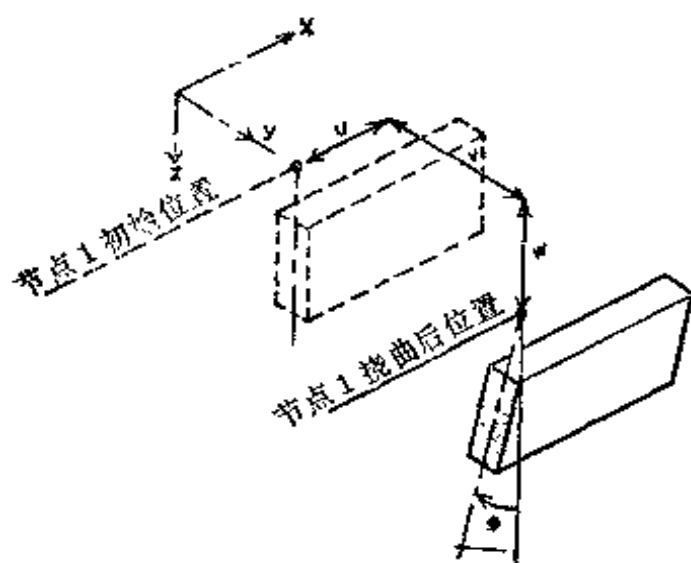


图 B.3 腹板单元上的力

(a) 作用荷载；(b) 与面板的反力；(c) 腹板单元端部上的力

节点的挠度示于图 B.4 中。对于弯矩假定腹板是“厚”的，而且不作平面外的垂直弯曲。



图B.4 厚腹板的位移

所有的力与位移的变量均为正弦或余弦函数，以跨径中点作原点，则为下列的形式：

$$\begin{array}{lll}
 Z \cos \alpha x & N \cos \alpha x & Y \cos \alpha x \\
 w \cos \alpha x & \phi \cos \alpha x & v \cos \alpha x \\
 M \cos \alpha x & P \cos \alpha x & \\
 m \cos \alpha x & s \cos \alpha x & \rho \cos \alpha x \\
 X \sin \alpha x & S \sin \alpha x & T \sin \alpha x \\
 u \sin \alpha x & r \sin \alpha x & 
 \end{array} \quad (B.1)$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}$$

在下面的讨论中，正弦和余弦项被略去，因为它们在整个方程式中均相同。仅当取导数时才提到。

腹板1的单元的平衡方程式

$$\begin{array}{ll}
 -dS_{z1} + \sum s dx & = Z_1 dx \\
 -dT_1 + z dS_{y1} + \sum m dx - \sum \rho z dx & = N_1 dx \\
 -dP_1 + \sum r dx & = X_1 dx \\
 -dS_{y1} + \sum \rho dx & = Y_1 dx
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
-dM_{z1} - Sy_1 dx &= 0 \\
-dM_{y1} + Sz_1 dx - \bar{z}_1 dP_1 + \sum rz dx &= 0
\end{aligned}
\tag{B.2}$$

式中  $\Sigma$  表示与腹板 1 相联接的所有板 0—1 和 1—2 的力的总和。这些方程式可以用微分简化后并代入。

$$\begin{aligned}
-D^2 M_{y1} - \bar{z}_1 D^2 P_1 + \Sigma s + \Sigma z Dr &= Z_1 \\
-DT_1 - \bar{z}_1 D^2 M_{z1} + \Sigma m - \Sigma z \phi &= N_1 \\
-DP_1 + \Sigma r &= X_1 \\
D^2 M_{z1} + \Sigma \phi &= Y_1
\end{aligned}
\tag{B.3}$$

### B.3 板在平面外弯曲

图 B.5 示出板 0—1 的横向平面外弯曲。板 0—1 和 1—2 在节点 1 处的刚度方程式可以直接从式 2.10 写出，略去计入  $Z_1$  和  $N_1$  的固定边缘力，因而对于所有板。

$$\begin{aligned}
w' &= w'' = w_1 \\
\phi' &= \phi'' = \phi_1
\end{aligned}$$

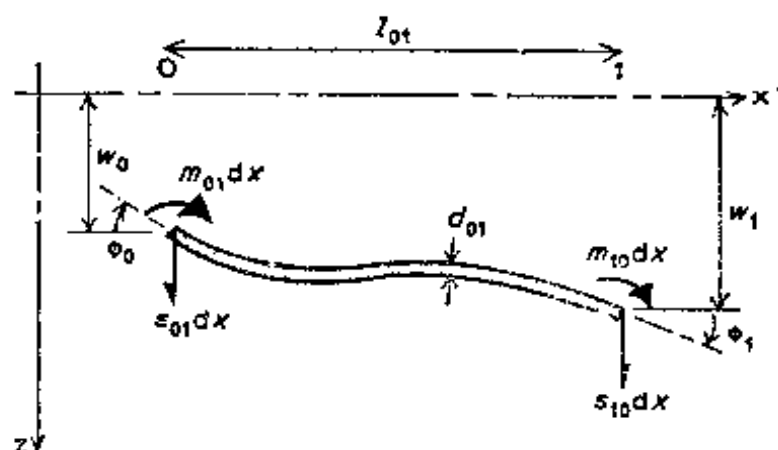


图 B.5 板单元的横向弯曲

将刚度总加起来，则为

$$\begin{aligned}
\Sigma s &= a_{01} w_0 + a_{11} w_1 + a_{12} w_2 - b_{01} \phi_0 + b_{11} \phi_1 \\
&\quad + b_{12} \phi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma m = & b_{01}w_0 + b_{11}w_1 - b_{12}w_2 + c_{01}\phi_0 + c_{11}\phi_1 \\ & + c_{12}\phi_2\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

式中系数为

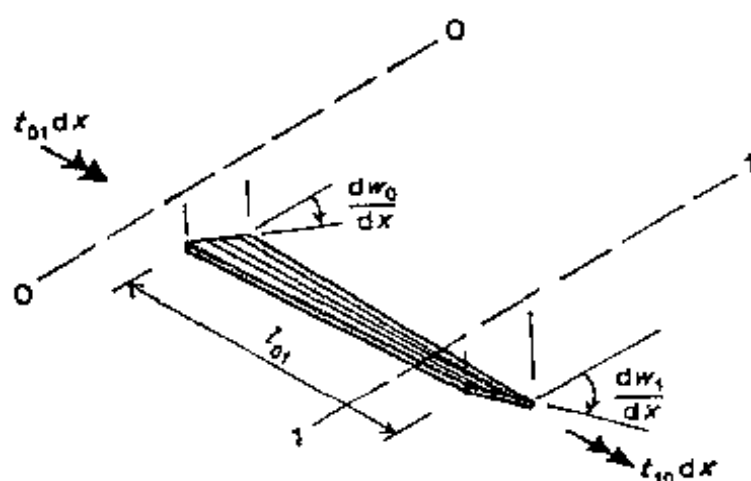
$$\begin{aligned}a_{01} &= -\frac{12Ei_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}^3} & b_{01} &= \frac{6Ei_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}^2} \\ c_{01} &= \frac{2Ei_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}} \\ a_{11} &= -a_{01} - a_{12} & b_{11} &= -b_{01} + b_{12} \\ c_{11} &= c_{01} + c_{12} + \frac{2E}{(1-\nu^2)} \left[ -\frac{i_{01}}{l_{01}} + \frac{i_{12}}{l_{12}} \right]\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

而  $i_{01}$  = 每单位宽度板的惯性矩总和。

$$= i'_{01} + i''_{01} = -\frac{d'^3_{01}}{12} + \frac{d''^3_{01}}{12}$$

与纵向弯曲的相互影响在以后考虑。

图 B.6 示出在扭矩作用下横向板条的扭转, 若横向抗扭常数为  $c_{y01}$ , 则



图B.6 板单元的扭转

$$t_{01}dx = -t_{10}dx = Gc_{y01}dx \left( -\frac{dw_1}{dx} - -\frac{dw_0}{dx} \right) \cdot \frac{1}{l_{01}}$$

或

$$t_{01} = -t_{10} = -\frac{Gc_{y01}\alpha}{l_{01}}(w_1 - w_0)\sin\alpha x$$

这项扭转可由边缘静力等效剪力来代表。

$$\begin{aligned}\Delta s_{01} &= -\frac{dt_{01}}{dx} = -\frac{Gc_{y01}\alpha^2}{l_{01}}(w_1 - w_0) \\ &= -\Delta s_{01}\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

将此剪力加入式 B.4 中, 对于所有的板的系数  $a_{01}$  修正为

$$a_{01} = -\frac{12Ei_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}^3} - \frac{Gc_{y01}\alpha^2}{l_{01}} \quad (\text{B.7})$$

对于一块板

$$c_{y01} = \frac{d^3_{01}}{6} = 2i_{01}$$

#### B.4 腹板刚度方程式

因为腹板形心位于节点之下  $\bar{z}_1$  处, 其挠度为

$$u = u_1 - \bar{z}_1 \frac{dw_1}{dx} = (u_1 + \bar{z}_1 \alpha w_1) \sin \alpha x$$

$$v = (v_1 - z_1 \phi_1) \cos \alpha x$$

$$w = w_1 \cos \alpha x$$

$$\phi = \phi_1 \cos \alpha x$$

对于腹板, 抗扭刚度方程式为

$$\begin{aligned}T_1 &= T_1 \sin \alpha x = GC_{b1} D (\phi_1 \cos \alpha x) \\ &= -GC_{b1} \alpha \phi_1 \sin \alpha x \\ DT_1 &\approx -GC_{b1} \alpha^2 \phi_1 \cos \alpha x\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

由于相邻面板的一半的抗扭刚度归并在腹板内, 则  $C_{b1}$  为包



括一半相邻面板的腹板圣维南抗扭常数 (见图 B.10)。

具有惯性矩  $I_{y1}$  的腹板的垂直弯曲为:

$$\begin{aligned} M_{y1} &= -EI_{y1}D^2(w_1 \cos \alpha x) = EI_{y1}\alpha^2 w_1 \cdot \cos \alpha x \\ D^2 M_{y1} &= -EI_{y1}\alpha^4 w_1 \cos \alpha x \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

具有惯性矩  $I_{z1}$  的腹板的侧向弯曲为:

$$\begin{aligned} M_{z1} &= EI_{z1}D^2(v \cos \alpha x) = -EI_{z1}\alpha^2 \cdot (v_1 - \bar{z}_1 \phi_1) \cos \alpha x \\ D^2 M_{z1} &= EI_{z1}\alpha^4 (v_1 - \bar{z}_1 \phi_1) \cos \alpha x \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

面积  $A_1$  的腹板的拉力为

$$\begin{aligned} P_1 &= EA_1 D(u \sin \alpha x) = EA_1 (\alpha u_1 + \bar{z}_1 \alpha^2 w_1) \cdot \cos \alpha x \\ DP_1 &= -EA_1 (\alpha^2 u_1 + \bar{z}_1 \alpha^3 w_1) \sin \alpha x \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

把式 B.11 微分并乘上  $\bar{z}_1$  后, 再与式 B.9 合并

$$\begin{aligned} D^2 M_{y1} + \bar{z}_1 D^2 P_1 &= -E(I_{y1} + A_1 \bar{z}_1^2) \alpha^4 w_1 \cdot \cos \alpha x \\ &\quad - EA_1 \bar{z}_1 \alpha^3 u_1 \cdot \cos \alpha x \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

## B.5 纵向与横向弯矩的相互影响

板 0—1 的平均挠度为

$$w = \frac{(w_0 + w_1)}{2} \cos \alpha x$$

而平均纵向曲率为

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{(w_0 + w_1)}{2} \alpha^2 \cos \alpha x$$

因而横向弯矩修正值为

$$\begin{aligned} \Delta m_{01} = -\Delta m_{10} &= -\frac{\nu E i_{01}}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\nu E i_{01} \alpha^2}{2(1-\nu^2)} \\ &\quad \cdot (w_0 + w_1) \end{aligned}$$

而在腹板上附加的弯矩总和为

$$\begin{aligned} \Delta \Sigma m &= \bar{b}_{01} w_0 + \left[ -\bar{b}_{01} + \bar{b}_{12} - \frac{\nu E \alpha^2}{(1-\nu^2)} \cdot (i_{01} - i_{12}) \right] w_1 \\ &\quad - \bar{b}_{12} w_2 \end{aligned}$$

$$\bar{b}_{01} = -\frac{\nu E \alpha^2 i_{01}}{2(1-\nu^2)} \quad (\text{B.13})$$

板 0—1 的平均横向曲率为  $(\phi_0 - \phi_1)/l_{01}$ 。因而纵向弯矩修正值为

$$\Delta M_{y1} = \frac{\nu E i_{01}}{(1-\nu^2)} \frac{l_{01}}{2} \left( -\frac{\phi_0 - \phi_1}{l_{01}} \right) +$$

$$\frac{\nu E i_{12}}{(1-\nu^2)} \frac{l_{12}}{2} \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{l_{12}} \right)$$

微分两次则有

$$\Delta D^2 M_{y1} = -\bar{b}_{01} \phi_0 + \left[ -\bar{b}_{01} + \bar{b}_{12} - \frac{\nu E \alpha^2}{(1-\nu^2)} \right. \\ \left. \cdot (i_{01} - i_{12}) \right] \phi_1 + \bar{b}_{12} \phi_2 \quad (\text{B.14})$$

### B.6 板在平面内作用

图 B.7 示出板条 0—1 的平面图，a) 为边缘挠度而 b) 则为边缘力。这些图形的对称和反对称分量分别表示于图 B.8 和 B.9 中。力  $P_{01}$ ,  $S_{01}$  和  $M_{01}$  为横贯板条截面的平面内的力。平面内的对称性能：

在图 B.8 中，沿  $x$  方向分解则有

$$dP_{01} = -(r_{01} + r_{10}) dx \sin \alpha x$$

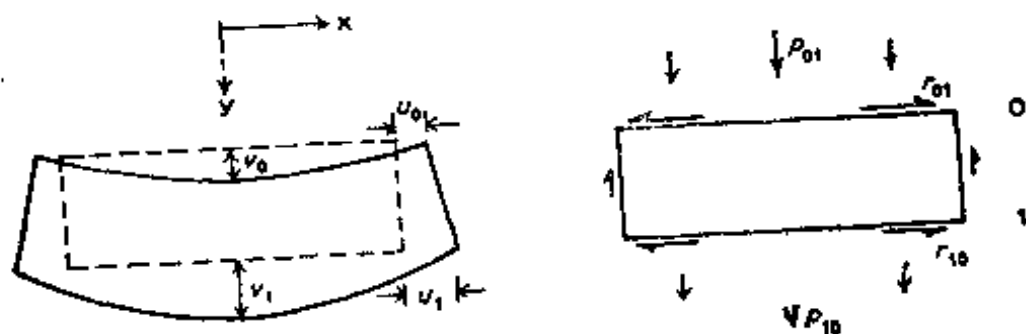
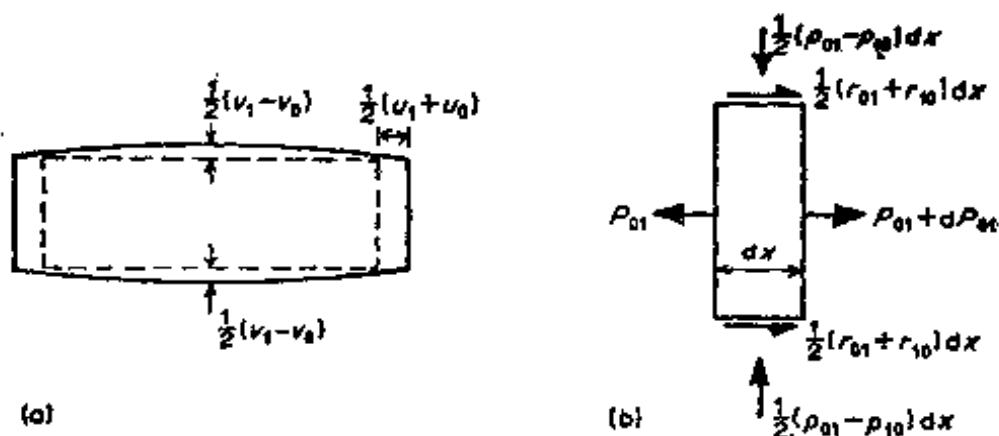


图 B.7 板的平面内的位移和力



图B.8 板的对称分量在平面内作用  
(a)位移; (b)力

故平均纵向拉应力为

$$\sigma_x = \frac{P_{01}}{l_{01}d_{01}} = \frac{r_{01} + r_{10}}{l_{01}d_{01}\alpha} \cos \alpha x$$

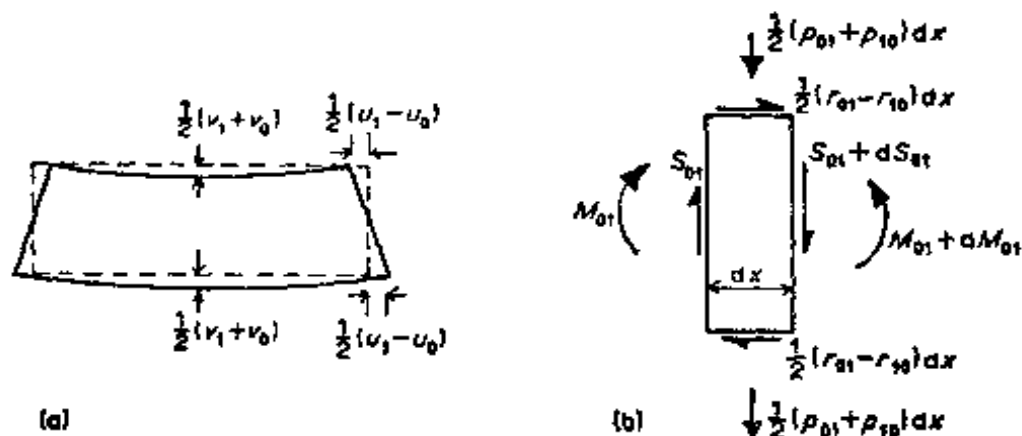
横向拉应力为

$$\sigma_y = -\frac{1}{2} \frac{P_{01} - P_{10}}{d_{01}} \cos \alpha x$$

由图 B.8 的挠度可得应变为

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1/2(u_0 + u_1)\alpha \cos \alpha x$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_1 - v_0}{l_{01}} \cos \alpha x$$



图B.9 板的反对称分量在平面内作用  
(a)位移; (b)力

平面应力要求

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \epsilon_x + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \epsilon_y$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} \epsilon_y + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \epsilon_x$$

故

$$\begin{aligned} r_{01} + r_{10} = & -\frac{El_{01}d_{01}\alpha^2}{(1-\nu^2)2}(u_0 + u_1) \\ & + \frac{\nu Ed_{01}\alpha}{(1-\nu^2)}(\nu_1 - \nu_0) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} p_{01} - p_{10} = & -\frac{\nu Ed_{01}\alpha}{(1-\nu^2)}(u_0 + u_1) - \frac{2Ed_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}} \\ & \cdot (\nu_1 - \nu_0) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

平面内的反对称性能

在图 B.9 中, 沿  $y$  方向分解为

$$dS_{01} = -(p_{01} + p_{10})dx \cos \alpha x$$

取弯矩

$$\begin{aligned} dM_{01} = & S_{01}dx + 1/2(r_{01} - r_{10})l_{01}dx \sin \alpha x \\ = & \frac{(p_{01} + p_{10})}{\alpha} dx \sin \alpha x + 1/2(r_{01} - r_{10}) \\ & \cdot l_{01}dx \sin \alpha x \end{aligned}$$

积分三次并除以  $-EI_{z01}$ , 其中  $I_{z01} = d_{01}l_{01}^3/12$ , 即可求得由弯曲所产生的挠度。

$$\begin{aligned} 1/2(\nu_0 + \nu_1)_{\text{弯曲}} = & \left[ \frac{(p_{01} + p_{10})}{\alpha^4 I_{z01} E} - \frac{(r_{01} - r_{10})l}{2\alpha^3 E I_{z01}} \right] \\ & \cdot \cos \alpha x \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

它引起纵向端位移为

$$\begin{aligned}
 1/2(u_1 - u_0) &\approx \frac{l_{01}}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\text{弯曲}} \\
 &= \frac{l_{01}}{2} \frac{(v_0 + v_1)_{\text{弯曲}}}{2} \sin \alpha x
 \end{aligned}$$

故

$$1/2(u_1 - u_0) = \frac{(\phi_{01} + \phi_{10})l_{01}}{2\alpha^3 I_{z01} E} - \frac{(\tau_{01} - \tau_{10})l_{01}^2}{4\alpha^2 I_{z01} E} \quad (\text{B.18})$$

还有一个由于剪切变形引起的侧向挠度的分量。假定平面截面仍然保持平面，则为

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\text{剪切}} = -\frac{S_{01}}{Gl_{01}d_{01}} = -\frac{(\phi_{01} + \phi_{10})}{Gl_{01}d_{01}\alpha} \sin \alpha x$$

故

$$1/2(v_0 + v_1)_{\text{剪切}} = \frac{(\phi_{01} + \phi_{10})}{Gl_{01}d_{01}\alpha^2} \cos \alpha x \quad (\text{B.19})$$

合併式 B.17 和 B.19 则有

$$\begin{aligned}
 1/2(v_0 + v_1) &= (\phi_{01} + \phi_{10}) \left[ \frac{1}{\alpha^4 I_{z01} E} + \frac{1}{\alpha^2 l_{01} d_{01} G} \right] \\
 &\quad - \frac{(\tau_{01} - \tau_{10})l_{01}}{2\alpha^3 I_{z01} E} \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

整理式 B.18 和式 B.20，并把  $d_{01}l_{01}^3/12$  写作  $I_{z01}$  而  $E/2(1 + \nu)$  作  $G$  则得

$$\begin{aligned}
 (\phi_{01} + \phi_{10}) &= \frac{\alpha^2 l_{01} d_{01} E}{4(1 + \nu)} (v_0 + v_1) - \frac{\alpha d_{01} E}{2(1 + \nu)} \\
 &\quad \cdot (u_1 - u_0) \quad (\text{B.21})
 \end{aligned}$$

$$(r_{01} - r_{10}) = \frac{\alpha d_{01} E}{2(1 + \nu)} (\nu_0 + \nu_1) - \left[ -\frac{\alpha^2 l_{01} d_{01} E}{6} + \frac{d_{01} E}{(1 + \nu) l_{01}} \right] (u_1 - u_0) \quad (\text{B.22})$$

从式 B.15, B.16, B.21 和 B.22 得到

$$r_{10} = g_{01} u_0 + \left[ -g_{01} + \frac{\alpha^2 l_{01} d_{01} E}{2(1 - \nu^2)} \right] u_1 - k_{01} \nu_0 + \left[ -k_{01} + \frac{\nu \alpha d_{01} E}{(1 - \nu^2)} \right] \nu_1 \quad (\text{B.23})$$

$$p_{10} = k_{01} u_0 + \left[ -k_{01} + \frac{\nu \alpha d_{01} E}{(1 - \nu^2)} \right] u_1 + n_{01} \nu_0 + \left[ n_{01} + \frac{2 d_{01} E}{(1 - \nu^2) l_{01}} \right] \nu_1 \quad (\text{B.24})$$

式中

$$g_{01} = - \left[ \frac{1}{2(1 + \nu) l_{01}^2} - \alpha^2 \left( -\frac{1}{4(1 - \nu^2)} - \frac{1}{12} \right) \right] \cdot A_{01} E$$

$$k_{01} = \frac{\alpha d_{01} E}{4(1 - \nu)}$$

$$n_{01} = - \left[ \frac{1}{(1 - \nu^2) l_{01}^2} - \frac{\alpha^2}{8(1 + \nu)} \right] A_{01} E \quad (\text{B.25})$$

$$A_{01} = l_{01} d_{01}$$

在结构中顶板的水平面处位移  $u$  和  $\nu$  与节点挠度关系为

$$u' = u_1 + z' \alpha w_1 \quad \nu' = \nu_1 - z' \phi_1$$

对于底板也可得到相似的方程式, 以此代入式 B.23 和 B.24, 并将与腹板 1 相联的板条边缘处所有相似的方程式加起来,

则得:

$$\begin{aligned}
 \Sigma r = & g_{01}u_0 + \left[ -g_{01} - g_{12} + \frac{\alpha^2 E}{(1-v^2)} \left( \frac{A_{01} + A_{12}}{2} \right) \right] \\
 & \cdot u_1 + g_{12}u_2 \\
 & + e_{01}\omega_0 + \left[ -e_{01} - e_{12} + \frac{\alpha^3 E}{(1-v^2)} \right. \\
 & \cdot \left( \frac{A_{01}z_{01} + A_{12}z_{12}}{2} \right) \left. \right] \cdot \omega_1 + e_{12}\omega_2 \\
 & - k_{01}v_0 + \left[ -k_{01} + k_{12} + \frac{v\alpha E}{(1-v^2)} (d_{01} - d_{12}) \right] \\
 & \cdot v_1 + k_{12}v_2 \\
 & + f_{01}\phi_0 + \left[ f_{01} - f_{12} - \frac{v\alpha E}{(1-v^2)} (d_{01}z_{01} \right. \\
 & \left. - d_{12}z_{12}) \right] \phi_1 - f_{12}\phi_2
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

而

$$\begin{aligned}
 \Sigma p = & k_{01}u_0 + \left[ -k_{01} + k_{12} + \frac{v\alpha E}{(1-v^2)} (d_{01} - d_{12}) \right] \\
 & \cdot u_1 - k_{12}u_2 \\
 & + h_{01}\omega_0 + \left[ -h_{01} + h_{12} + \frac{v\alpha^2 E}{(1-v^2)} \right. \\
 & \cdot (d_{01}z_{01} - d_{12}z_{12}) \left. \right] \omega_1 - h_{12}\omega_2 \\
 & + n_{01}v_0 + \left[ n_{01} + n_{12} + \frac{2E}{(1-v^2)} \left( \frac{d_{01}}{l_{01}} + \frac{d_{12}}{l_{12}} \right) \right] \\
 & \cdot v_1 + n_{12}v_2 \\
 & + j_{01}\phi_0 + \left[ j_{01} + j_{12} - \frac{2E}{(1-v^2)} \left( \frac{d_{01}z_{01}}{l_{01}} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\frac{d_{12}z_{12}}{l_{12}}) \Big] \phi_1 + i_{12} \phi_2 \quad (\text{B.27})$$

对于  $g$ ,  $k$  和  $n$  的表达式和式 B.25 是相同的, 只是现在符号等于板特性的总和。

$$d_{01} = \text{板厚度之和} = d'_{01} + d''_{01}$$

$$A_{01} = \text{板横截面面积的总和} = l_{01}(d'_{01} + d''_{01})$$

而在式 B.26 与 B.27 中附加的系数值为:

$$\begin{aligned} e_{01} &= z_{01} \alpha g_{01} & f_{01} &= z_{01} k_{01} \\ h_{01} &= z_{01} \alpha k_{01} & i_{01} &= -z_{01} n_{01} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

式中:  $z_{01}$  = 板的形心水平线

$$= \frac{z'_{01} d'_{01} + z''_{01} d''_{01}}{d'_{01} + d''_{01}}$$

为了求得  $\Sigma z Dr$ , 把式 B.26 中的所有项乘以  $z'$  或  $z''$  再微分, 然后乘以  $\alpha$  可以得到

$$\begin{aligned} \Sigma z Dr &= +e_{01} u_0 + \left[ -e_{01} - e_{12} + \frac{\alpha^3 E}{(1 - \nu^2)} \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{A_{01} z_{01} + A_{12} z_{12}}{2} \right) \right] u_1 + e_{12} u_2 \\ &\quad + \bar{a}_{01} w_0 + \left[ -\bar{a}_{01} - \bar{a}_{12} + \frac{\alpha^4 E}{(1 - \nu^2)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( -\frac{I_{01}^0 + I_{12}^0}{2} \right) \right] w_1 + \bar{a}_{12} w_2 \\ &\quad - h_{01} v_0 + \left[ -h_{01} + h_{12} + \frac{\nu \alpha^2 E}{(1 - \nu^2)} (d_{01} z_{01} \right. \\ &\quad \left. - d_{12} z_{12}) \right] v_1 + h_{12} v_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\bar{b}_{01}\phi_0 + \left[ -\bar{b}_{01} + \bar{b}_{12} - \frac{v\alpha^2 E}{(1-v^2)} \right. \\
& \left. \cdot \left( \frac{I_{01}^0}{l_{01}} - \frac{I_{12}^0}{l_{12}} \right) \right] \phi_1 + \bar{b}_{12}\phi_2 \quad (\text{B.29})
\end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{01} &= - \left[ -\frac{1}{2(1+v)l_{01}^2} - \alpha^2 \left( \frac{1}{4(1-v^2)} - \frac{1}{12} \right) \right] \\
&\quad \cdot \alpha^2 I_{01}^0 E \\
\bar{b}_{01} &= - \frac{\alpha^2 I_{01}^0 E}{4(1-v)l_{01}} \quad (\text{B.30})
\end{aligned}$$

$$I_{01}^0 = l_{01}(d'_{01}z_{01}^2 + d''_{01}z_{01}^2)$$

用  $-z'$  或  $-z''$  乘以式27的所有系数, 则得

$$\begin{aligned}
-\Sigma z p &= -f_{01}u_0 + \left[ +f_{01} - f_{12} - \frac{v\alpha E}{(1-v^2)}(d_{01}z_{01} - \right. \\
&\quad \left. d_{12}z_{12}) \right] u_1 + f_{12}u_2 \\
&\quad + \bar{b}_{01}\omega_0 + \left[ -\bar{b}_{01} + \bar{b}_{12} - \frac{v\alpha^2 E}{(1-v^2)} \left( \frac{I_{01}^0}{l_{01}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{I_{12}^0}{l_{12}} \right) \right] \omega_1 - \bar{b}_{12}\omega_2 \\
&\quad + j_{01}v_0 + \left[ j_{01} + j_{12} - \frac{2E}{(1-v^2)} \left( \frac{d_{01}z_{01}}{l_{01}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{d_{12}z_{12}}{l_{12}} \right) \right] v_1 + j_{12}v_2 \\
&\quad + \bar{c}_{01}\phi_0 + \left[ \bar{c}_{01} + \bar{c}_{12} + \frac{2E}{(1-v^2)} \left( \frac{I_{01}^0}{l_{01}^2} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{matrix} I_{12}^0 \\ I_{12}^2 \end{matrix} \right) \phi_1 + \bar{c}_{12} \phi_2 \quad (\text{B.31})$$

式中:

$$\bar{c}_{01} = - \left[ \frac{1}{(1-\nu^2)I_{01}^2} - \frac{\alpha^2}{8(1+\nu)} \right] I_{01}^0 E$$

### B.7 节点刚度方程

现在有可能把  $\Sigma m$ ,  $\Sigma r$  的各种函数代入式 B.3 的左边以求得节点 1 的刚度方程式 B.32-B.35。对于板的平面内作用与腹板弯曲各项合并后, 可以看出, 如果各分量作为图 B.10 中的“梁”截面的截面特性而总加起来, 则结果是相当简化的。

$z_{b1}$  = 在  $Oy$  以下至“梁”的形心水平线距离。

$I_{b1}$  = “梁” 1 绕  $Oy$  (注意不绕形心) 的惯性矩。

$$= \frac{i_{01}I_{01} + i_{12}I_{12}}{2(1-\nu^2)} + \frac{I_{01}^0 + I_{12}^0}{2(1-\nu^2)} + I_{y1} + A_1 \bar{z}_1^2$$

$$A_{b1} = \frac{A_{01} + A_{12}}{2(1-\nu^2)} + A_1$$

此外,  $I_{01} = I_{01}^0 + i_{01}I_{01}$

式 B.32 是从式 B.12, B.14, B.29 和 B.4 求得 (用 B.5 和 B.7 确定的数值)。

式 B.33 是从式 B.8, B.10, B.31 和 B.4 用 B.13 求得。

式 B.34 是从式 B.11 和 B.26 求得。

式 B.35 是从式 B.10 和 B.27 求得。

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} & -b_{01} & b_{11} & b_{12} & c_{01} & c_{11} & c_{12} & -h_{01} & h_{11} & h_{12} \\ b_{01} & b_{11} & -b_{12} & c_{01} & c_{11} & c_{12} & -f_{01} & f_{11} & f_{12} & j_{01} & j_{11} & j_{12} \\ c_{01} & c_{11} & c_{12} & f_{01} & f_{11} & -f_{12} & g_{01} & g_{11} & g_{12} & -k_{01} & k_{11} & k_{12} \\ h_{01} & h_{11} & -h_{12} & j_{01} & j_{11} & j_{12} & k_{01} & k_{11} & k_{12} & n_{01} & n_{11} & n_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

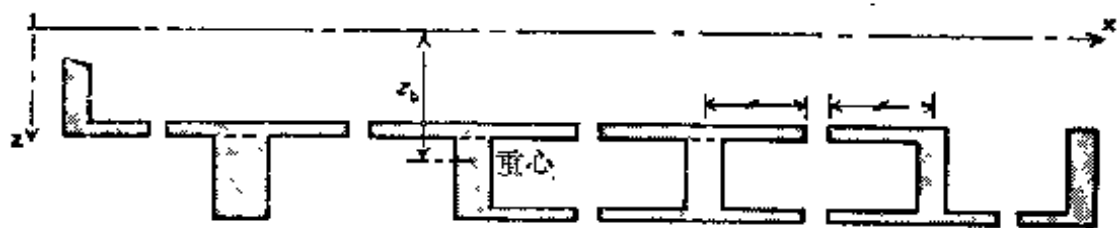
$$= \begin{pmatrix} Z_1 \\ N_1 \\ X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

$$(B.32)$$

$$(B.33)$$

$$(B.34)$$

$$(B.35)$$



图B.10 上部结构划分为“梁”

式中:

$$a_{01} = -\frac{Ec_{y01}\alpha^2}{(1-\nu^2)I_{01}^3} - \frac{Ec_{y10}\alpha^2}{2(1+\nu)I_{01}} - \left[ \frac{1}{2(1+\nu)I_{01}^2} - \alpha^2 \left( \frac{1}{4(1-\nu^2)} - \frac{1}{12} \right) \right] E\alpha^2 I_{01}^0$$

$$a_{11} = -a_{01} - a_{12} + E\alpha^4 I_{b1}$$

$$b_{01} = -\frac{6Ei_{01}}{(1-\nu^2)I_{01}^2} - \frac{\nu E\alpha^2 i_{10}}{2(1-\nu^2)} - \frac{E\alpha^2 I_{01}^0}{4(1-\nu)I_{01}}$$

$$b_{11} = -b_{01} + b_{12} - \frac{\nu E\alpha^2}{(1-\nu^2)} \left( \frac{I_{01}}{I_{01}} - \frac{I_{12}}{I_{12}} \right)$$

$$c_{01} = \frac{2Ei_{01}}{(1-\nu^2)I_{01}} - \left[ \frac{1}{(1-\nu^2)I_{01}^2} - \frac{\alpha^2}{8(1+\nu)} \right] EI_{01}^0$$

$$c_{11} = c_{01} + c_{12} + \frac{2E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{I_{01}}{I_{01}^2} + \frac{I_{12}}{I_{12}^2} \right) + E\alpha^4 \bar{\alpha}_1^2 I_{z1}$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \alpha^2 C_{b1}$$

$$e_{01} = \alpha z_{01} g_{01}$$

$$e_{11} = -e_{01} - e_{12} + E\alpha^3 z_{b1} A_{b1}$$

$$f_{01} = z_{01} k_{01}$$

$$f_{11} = f_{01} - f_{12} - \frac{\nu E \alpha}{(1 - \nu^2)} (d_{01} z_{01} - d_{12} z_{12})$$

$$g_{01} = - \left[ \frac{1}{2(1 + \nu) I_{01}^2} - \alpha^2 \left( -\frac{1}{4(1 - \nu^2)} - \frac{1}{12} \right) \right] E A_{01}$$

$$g_{11} = -g_{01} - g_{12} + E \alpha^2 A_{b1}$$

$$h_{01} = \alpha f_{01}$$

$$h_{11} = -\alpha f_{11}$$

$$\dot{f}_{01} = -z_{01} n_{01}$$

$$\dot{f}_{11} = \dot{f}_{01} + \dot{f}_{12} - \frac{2E}{(1 - \nu^2)} \left( \frac{d_{01} z_{01}}{I_{01}} + \frac{d_{12} z_{12}}{I_{12}} \right)$$

$$- E \alpha^4 \bar{z}_1 I_{z1}$$

$$k_{01} = \frac{E \alpha d_{01}}{4(1 - \nu)}$$

$$k_{11} = -k_{01} + k_{12} + \frac{\nu E \alpha}{(1 - \nu^2)} (d_{01} - d_{12})$$

$$n_{01} = - \left[ \frac{1}{(1 - \nu^2) I_{01}^2} - \frac{\alpha^2}{8(1 + \nu)} \right] E A_{01}$$

$$n_{11} = n_{01} + n_{12} + \frac{2E}{(1 - \nu^2)} \left( \frac{d_{01}}{I_{01}} + \frac{d_{12}}{I_{12}} \right) + \alpha^4 I_{z1}$$

### B.8 对于平面的上部结构节点刚度方程

如果板的形心高度  $z_{01}$  在所有节点处均相同，同时把  $Oy$  轴设于与形心平面同一水平面上则可以得到相当大的简化。对于梁板式上部结构应设在板的中面内，而对于分格式上部结构应设在两平板的形心水平而上（悬臂板需考虑作为边腹板的一部分）。在这种情况下

$$e_{01} = e_{12} = h_{01} = h_{11} = h_{12} = f_{01} = f_{11} = f_{12} = j_{01} = j_{12} \\ = 0 \quad (\text{B.36})$$

如果上部结构有一对称于  $Oy$  轴的横截面，则可得到更进一步的简化。对于梁板式上部结构这意味着板的薄膜作用与梁格法一样略去不计。因而节点刚度方程式可以写成。

$$\begin{bmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} & -b_{01} & b_{11} & b_{12} \\ b_{01} & b_{11} & -b_{12} & c_{01} & c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ N_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

如果泊松比为  $\nu = 0.2$ ，二阶项略去不计，则这些系数为：

$$a_{01} = - \left( -\frac{12.5i_{01}}{l_{01}^3} + \frac{0.42e_{y01}\alpha^2}{I_{01}} + \frac{0.42\alpha^2 I_{01}^0}{l_{01}^2} \right) E \\ a_{11} = -a_{01} - a_{12} + \alpha^4 I_{b1} E \\ b_{01} = \left( -\frac{6.25i_{01}}{l_{01}^2} - 0.10i_{01}\alpha^2 - \frac{0.31I_{01}^0}{l_{01}} \right) E \\ b_{11} = -b_{01} + b_{12} - 0.21\alpha^2 \left( \frac{I_{01}^0}{l_{01}} - \frac{I_{12}^0}{l_{12}} \right) E \\ c_{01} = \left( \frac{2.08i_{01}}{l_{01}} - \frac{1.04I_{01}^0}{l_{01}^2} + 0.10\alpha^2 I_{01}^0 \right) E \\ c_{11} = c_{01} + c_{12} + 2.08 \left( -\frac{I_{01}}{l_{01}^2} + \frac{I_{12}}{l_{12}^2} \right) E + 0.42\alpha^2 C_{b1} E \quad (\text{B.38})$$

如果分析工作主要是企图求出荷载分布，而不是求挠度

时，则令  $E$  等于 1，计算工作量就将减少。

### B.9 薄腹板分格式上部结构的节点刚度方程式

式 B.37 可作修改以适应具有柔性腹板的上部结构。每一腹板现有三个转角位移  $\phi$ ， $\phi'$  和  $\phi''$  如图 B.11 所示。

现需要把式 B.3 中对于  $N_1$  的弯矩方程分解成三个分量：

在弯矩  $N'$  作用下，对于腹板板顶的转角  $\phi'_1$ ，其中  $m'_1$  为腹板板顶的弯矩。



图B.11 薄腹板平面外弯曲

$$m'_{10} + m'_{12} + m'_1 = N'_1 \quad (\text{B.39})$$

在弯矩  $N''$  作用下，对于腹板板底的转角  $\phi''_1$ 。

$$m''_{10} + m''_{12} + m''_1 = N''_1 \quad (\text{B.40})$$

对于腹板的倾角  $\phi_1$

$$-DT_1 - \bar{z}_1 D^2 M_{x1} - \sum z \phi - m'_1 - m''_1 = 0 \quad (\text{B.41})$$

腹板的角位移方程为

$$m'_1 = -\frac{Ei_1}{(1-\nu^2)l_1} (4\phi'_1 + 2\phi''_1 - 6\phi_1)$$

$$m''_1 = -\frac{Ei_1}{(1-\nu^2)l_1} (2\phi'_1 + 4\phi''_1 - 6\phi_1) \quad (\text{B.42})$$

式中： $i_1$  = 腹板每单位宽度绕纵向转的惯性矩  $= d_1^3/12$ 。

利用这些方程可以把式 B.37 改成 B.43。

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} & -\bar{b}_{01} & \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & -b'_{01} & b'_{11} & b'_{12} & -b''_{01} & b''_{11} & b''_{12} \\ \bar{b}_{01} & \bar{b}_{11} & -\bar{b}_{12} & \bar{c}_{01} & \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & 0 & -3c_1 & 0 & 0 & -3c_1 & 0 \\ b'_{01} & b'_{11} & -b'_{12} & 0 & -3c_1 & 0 & c'_{01} & c'_{11} & c'_{12} & 0 & c_1 & 0 \\ b''_{01} & b''_{11} & -b''_{12} & 0 & -3c_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & c''_{01} & c''_{11} & c''_{12} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi'_0 \\ \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi''_0 \\ \phi''_1 \\ \phi''_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Z_1 \\ 0 \\ N'_1 \\ N''_1 \end{bmatrix}$$



式中:

$$a_{01} = -\frac{12Ei_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}^3} - \frac{Ec_{y01}\alpha^2}{2(1+\nu)l_{01}} \\ - \left[ \frac{1}{2(1+\nu)l_{01}^2} - \alpha^2 \left( \frac{1}{4(1-\nu^2)} - \frac{1}{12} \right) \right] \\ \cdot E\alpha^2 I_{01}^0$$

$$a_{11} = -a_{01} - a_{12} + E\alpha^4 I_{b1}$$

$$\bar{b}_{01} = -\frac{E\alpha^2 I_{01}^0}{4(1-\nu)l_{01}}$$

$$b'_{01} = \frac{6Ei'_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}^3} - \frac{\nu E\alpha^2 i'_{01}}{2(1-\nu^2)}$$

$$b''_{01} = \frac{6Ei''_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}^3} - \frac{\nu E\alpha^2 i''_{01}}{2(1-\nu^2)}$$

$$\bar{b}_{11} = -\bar{b}_{01} + \bar{b}_{12} - \frac{\nu E\alpha^2}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{I_{01}^0}{l_{01}} - \frac{I_{12}^0}{l_{12}} \right]$$

$$b'_{11} = -b'_{01} + b'_{12} - \frac{\nu E\alpha^2}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{i'_{01}}{l_{01}} - \frac{i'_{12}}{l_{12}} \right]$$

$$b''_{11} = -b''_{01} + b''_{12} - \frac{\nu E\alpha^2}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{i''_{01}}{l_{01}} - \frac{i''_{12}}{l_{12}} \right]$$

$$\bar{c}_{01} = - \left[ \frac{1}{(1-\nu^2)l_{01}^2} - \frac{\alpha^2}{8(1+\nu)} \right] EI_{01}^0$$

$$\bar{c}_{11} = \bar{c}_{01} + \bar{c}_{12} + \frac{2E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{I_{01}^0}{l_{01}^2} + \frac{I_{12}^0}{l_{12}^2} \right] + \frac{E\alpha^2 C_{b1}}{2(1+\nu)} \\ + 6c_1$$

$$c'_{01} = \frac{2Ei'_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}} \quad c''_{01} = \frac{2Ei''_{01}}{(1-\nu^2)l_{01}} \quad c_1 = \frac{2Ei_1}{(1-\nu^2)l_1}$$

$$c'_{11} = 2c'_{01} + 2c'_{12} + 2c_1 \quad c''_{11} = 2c''_{01} + 2c''_{12} + 2c_1$$

